Relations entre diverses périodes en astronomie.

Introduction.

Nous allons établir dans ce document les relations entre diverses périodes en astronomie en nous appuyant sur les propriétés du solide indéformable. Nous établirons la formule générale de la vitesse de tout point du solide.
Cette formule nous permettra ensuite d'établir les relations précitées.

1 Cinématique du solide indéformable.

Nous représentons un référentiel ''absolu'' avec un système d'axes (O, x_1, x_2, x_3).
Nous avons un solide de centre de masse A et nous avons dessiné un système d'axes (A, y_1, y_2, y_3).solidaire du solide (fig1). Nous avons symbolisé en quelque sorte le solide par le système d'axes (A, y_1, y_2, y_3).

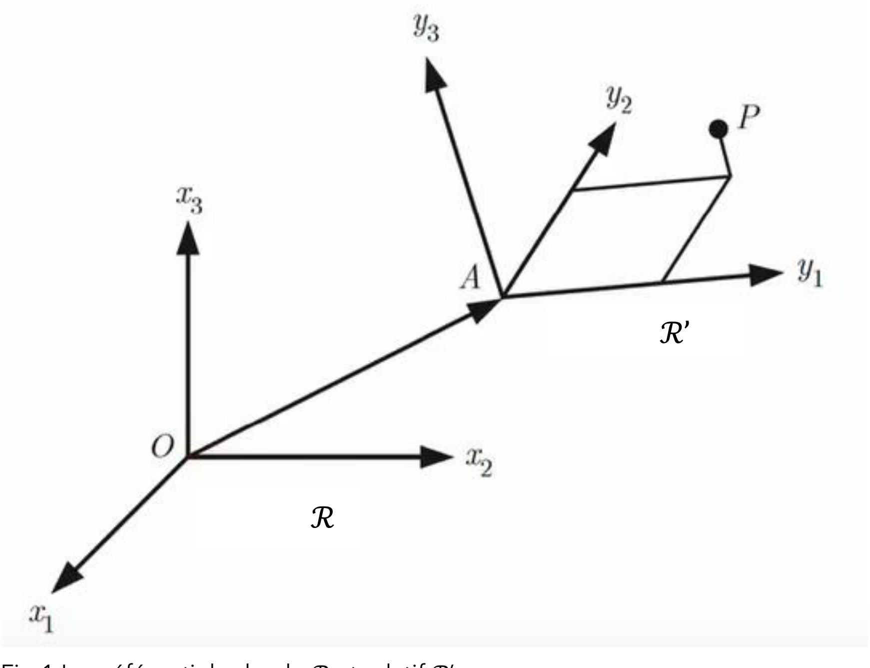

Fig.1 Les référentiels absolu $\mathcal{R}$ et relatif $\mathcal{R}'$

1.1Composition des vitesses.

Considérons la figure 2.

$\vec{\Omega}$ nous dit comment le repère relatif $\mathcal{R}'$ se réoriente par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. $\vec{\omega}$ nous informe sur le mouvement du solide vu depuis le référentiel $\mathcal{R}'$. Maintenant, nous cherchons à déterminer la vitesse du point P dans le référentiel $\mathcal{R}$, autrement dit, sa vitesse absolue $v_a(p)$

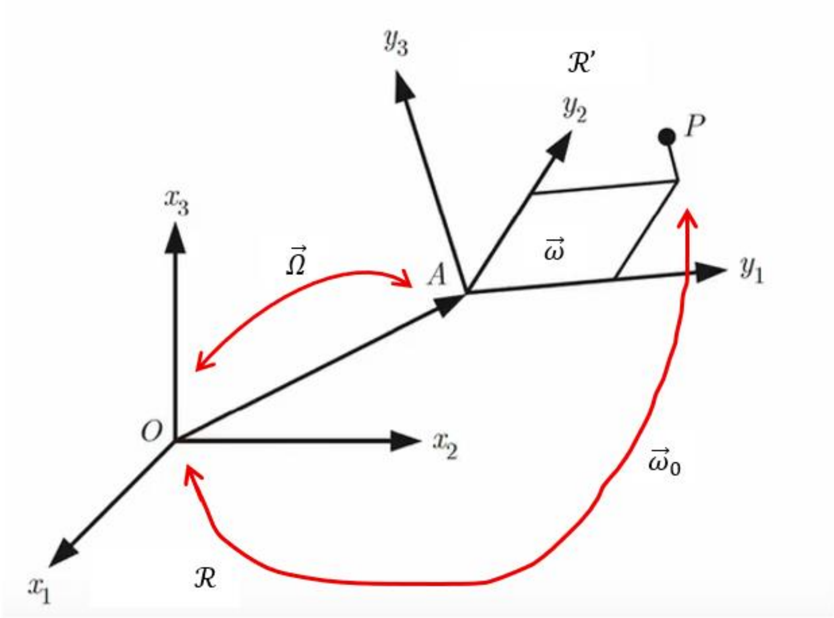

Fig.2 Composition de rotations des référentiels absolu $\mathcal{R}$ et relatif $\mathcal{R}'$

Nous pouvons écrire la formule générale suivante :

$$v_a(P) = v_a(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} + v_A(P)$$

où :

$v_a(A)$ est la vitesse absolue du point A, c'est-à-dire sa vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}$.

$v_A(P)$ est la vitesse relative du point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

or $v_A(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$, d'où :

$$v_a(P) = v_a(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\boxed{v_a(P) = v_a(A) + \overrightarrow{AP}\,(\vec{\omega} + \vec{\Omega})}$$

Nous voyons que la vitesse absolue du point P est composée de la vitesse absolue de point A (centre de masse du solide) et de la composition des vitesse angulaire et c'est bien ce que nous cherchions à faire apparaître.

2.1 Relations entre les périodes sidérale et synodique de la Lune.

Nous avons les données suivantes :
T* = 365,256363j : période sidérale de la Terre dans le référentiel galiléen de Copernic $\mathcal{R}$ dont le Soleil est le centre.
$\boldsymbol{L_s}$ **= 29,530589j** : période synodique de la Lune dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}'$

Nous recherchons la période sidérale de la Lune. Cette période sidérale n'est pas accessible à la mesure car la Terre se déplace par rapport au fond d'étoiles, elle peut néanmoins se déterminer par le calcul. Considérons le schéma de la figure 3 .
Le repère (S, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$).est attaché au référentiel de Copernic $\mathcal{R}$ d'origine S.

Le repère (T, $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$).est attaché au système Terre-Lune de centre de masse T qui constitue l'origine de repère géocentrique $\mathcal{R}'$. Celui-ci est animé d'un mouvement translation circulaire dans $\mathcal{R}$ de période T^*.

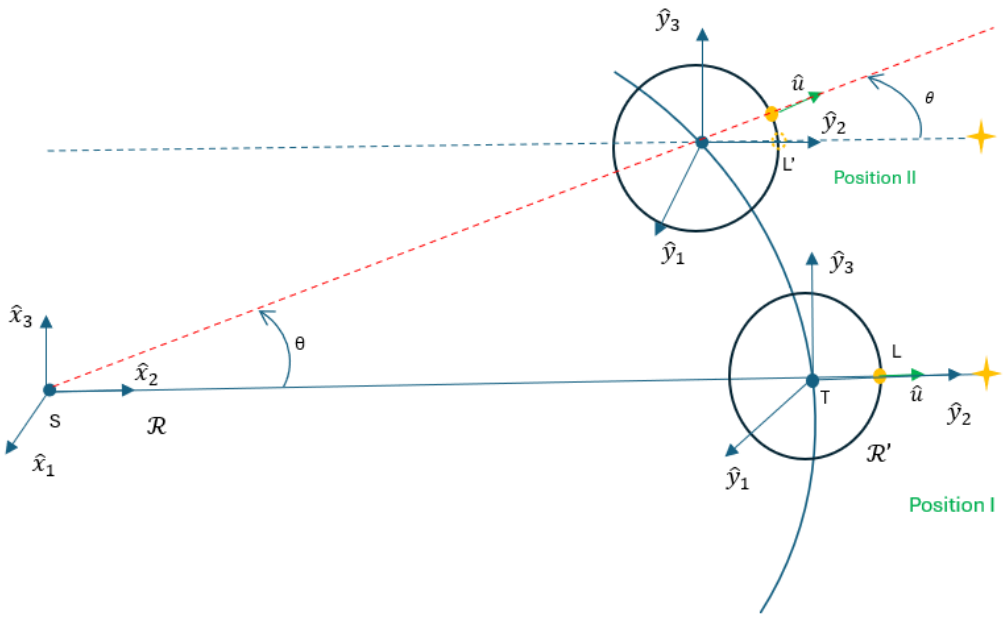

Fig.3 Composition des rotations de la Terre et de la Lune.

La Lune est animée d'un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}'$ de période.L_s autour de $\hat{y}_3$.
Le vecteur $\hat{u}$ est le vecteur unitaire allant de de S vers L
A l'instant initial t_0, $\overrightarrow{ST}$.et $\overrightarrow{SL}$ sont colinéaires, ce que nous pouvons exprimer sous la forme :

$$\overrightarrow{ST} = ST\ \hat{u}$$
$$\overrightarrow{SL} = SL\ \hat{u}$$

Après un jour sidéral, la Lune devrait se retrouver en L' (position II) si le système indéformable Terre-Lune n'était affecté que du seul mouvement de translation autour de $\mathcal{R}$. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{SL'} = SL'\hat{u}\ mais\ \overrightarrow{ST} \neq ST\ \hat{u}\ \ puisque\ \overrightarrow{ST}\ et\ \hat{u}\ \ n'ontpas\ la\ même\ direction.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{SL}\ et\ \overrightarrow{ST}$ ne sont donc plus colinéaires. Cependant le mouvement de rotation de la Lune autour de $\hat{y}_3$ fait qu'après un jour sidéral $\overrightarrow{SL}\ et\ \overrightarrow{ST}$ le sont de nouveau. La Lune a alors balayé un angle de θ .

Conformément à ce que nous avons vu précédemment, la composition des vitesses angulaires est :

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_{Ls} + \vec{\omega}_{T^*}$$

où $\vec{\omega}_{Ls}$est la vitesse angulaire de la période synodique de la Lune dans $\mathcal{R}$' et $\vec{\omega}_{T^*}$la vitesse angulaire sidérale de la Terre dans le référentiel de Copernic $\mathcal{R}$. Les vecteurs étant colinéaires, nous pouvons écrire :

$$\omega_0 = \omega_{Ls} + \omega_{T^*}$$

Faisons apparaître les différentes périodes dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{L_s} + \frac{2\pi}{T^*} <=> \frac{1}{T_0} = \frac{1}{L_s} + \frac{1}{T^*}$$

Le calcul numérique nous donne :

$T_0 = L^* = 27{,}3216\, j^*\ \ \ qui\ est\ la\ période\ sidérale\ de\ la\ Lune\ en\ jour\ sidéraux\ terrestres.$

2.2 Relations entre les périodes terrestres : jour sidéral, jour solaire moyen.

Nous noterons J_m la période du jour solaire moyen.
Considérons la figure 4. Le repère (S, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$).est attaché au référentiel de Copernic $\mathcal{R}$ d'origine S. Le repère (T, $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$).est attaché au système Terre. Le centre de celle-ci constitue l'origine du référentiel géocentrique $\mathcal{R}$'. Ce référentiel est animé d'un mouvement de translation circulaire dans $\mathcal{R}$ de période T^*

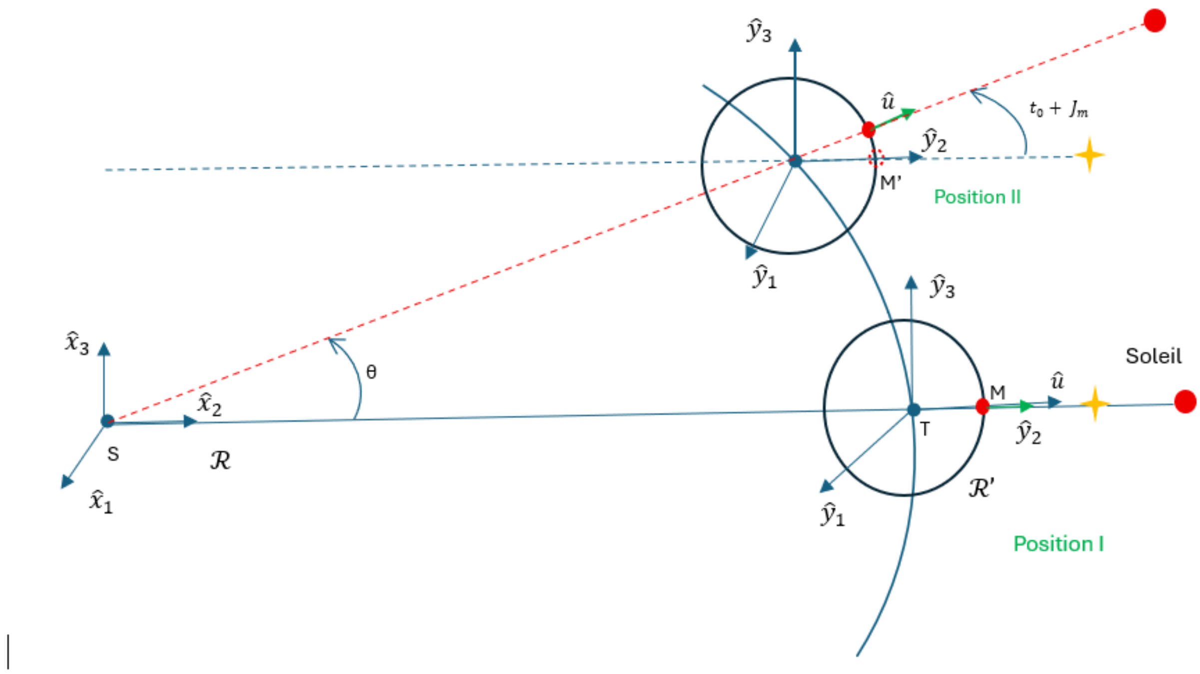

Fig.4 Composition des rotations relatives à l'année sidérale et au jour solaire moyen terrestre.

Le point M est un point quelconque à la surface de la Terre animé d'un mouvement de rotation de période J_m autour de $\hat{y}_3$ qui est confondu avec l'axe des pôles. Le vecteur $\hat{u}$ est le vecteur unitaire allant de S vers M.

A l'instant initial t_0 $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ sont colinéaires, ce que nous pouvons écrire de la façon suivante :

$$\overrightarrow{ST} = ST\,\hat{u}$$
$$\overrightarrow{SM} = SM\,\hat{u}$$

Après un jour sidéral, le point devrait se trouver en M' si ce point n'était affecté que du seul mouvement de translation autour de $\mathcal{R}$ (position II), dans ce cas :

$$\overrightarrow{SM'} = SM'\,\hat{u}\ mais\ \overrightarrow{ST} \neq ST\,\hat{u}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ ne sont plus colinéaires. Cependant la rotation de la Terre autour de $\hat{y}_3$ (autour de l'axe des pôles) fait qu'après un jour sidéral $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ le sont de nouveau (à l'instant $t_0 + J_m$).

La composition des vitesses angulaires nous donne :

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_{jm} + \vec{\omega}_{T^*}$$

soit,

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{j_m} + \frac{1}{T^*}$$

Le calcul numérique nous donne :

$$T_0 = j^* = 0{,}9972\, j_m = 86164\ s\ qui\ est\ la\ période\ du\ jour\ sidéral\ terrestre.$$

2.3 Relations entre les périodes sidérale et synodique des planètes.

Deux cas sont à envisager ici : le cas où la planète dont on cherche la période sidérale est inférieure par rapport à la planète de référence et le cas où la planète dont on cherche la période sidérale est supérieure à la planète de référence. Nous commencerons par ce second cas.

2.3.1 Cas où la planète de référence est supérieure à la planète considérée.

Nous nommons P_{ref} la planète de référence, ici la plus proche du Soleil, P_{sup} la planète supérieure par rapport à la planète de référence, T^*_{sup} la période sidérale de la planète supérieure, T^s_{sup} sa période synodique, grandeur accessible par la mesure depuis P_{ref}.
Considérons la figure 5, le repère $(P_{ref}, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, symbolise le référentiel de Copernic $\mathcal{R}$, d'origine P_{ref} .
$\mathcal{R}'$ a pour origine le centre de P_{sup} , il est symbolisé par le repère $(P_{sup}, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$.

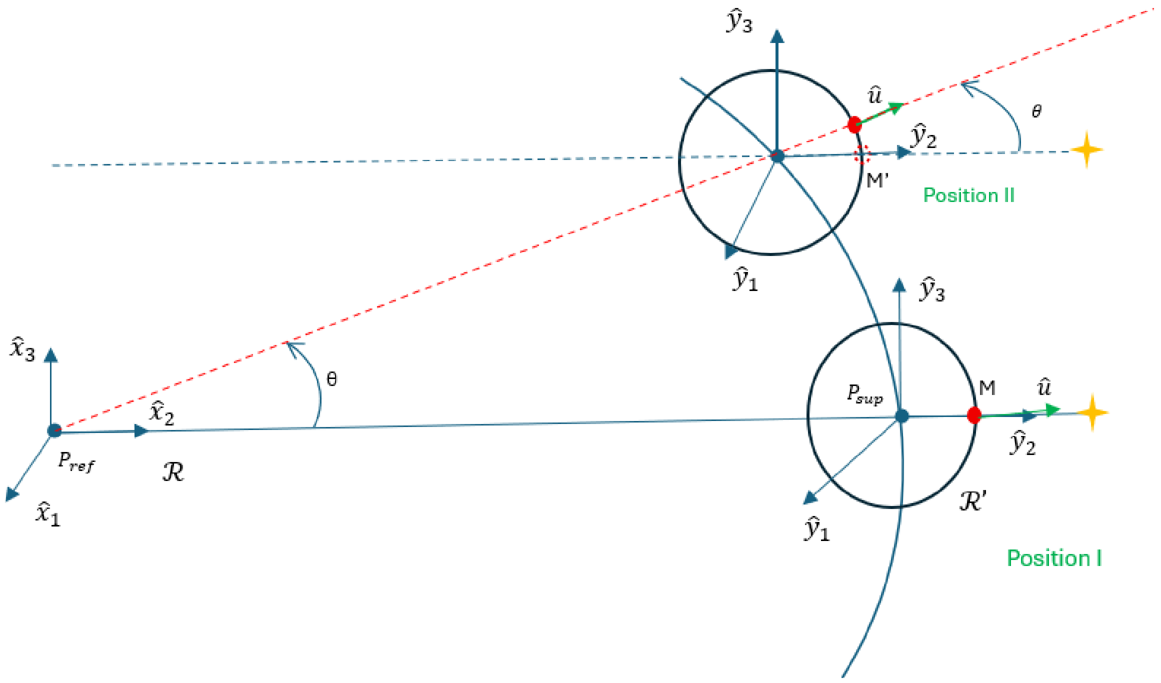

Fig.5 Composition des rotations relatives aux périodes sidérale et synodique d'une planète supérieure.

$\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement de translation dans $\mathcal{R}$ de période T^*_{sup}. Le point M est animé d'un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}'$ autour de l'axe $\hat{y}_3$ de période T^s_{sup}. Le vecteur $\hat{u}$ est le vecteur unitaire allant de P_{ref} vers M.
A l'instant initial t_0 $\overrightarrow{P_{ref}\ P_{sup}}$ et $\overrightarrow{P_{ref}\ M}$ sont colinéaires, ce que nous pouvons exprimer de la façon suivante :

$$\overrightarrow{P_{ref}\ P_{sup}} = P_{ref}\ P_{sup}\ \hat{u}$$

$$\overrightarrow{P_{ref}\ M} = P_{ref} M\ \hat{u}$$

Après un intervalle de temps correspondant à la période T^*_{ref}, P_{sup} a tourné d'un angle θ et se situe en position II avec le point M en M' si celui-ci était affecté du seul mouvement de translation dans $\mathcal{R}$. Dans ce cas, le vecteur unitaire $\hat{u}$ ne serait plus colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{P_{ref}\ P_{sup}}$. Cependant la rotation de M dans $\mathcal{R}'$ fait qu'après un intervalle de temps correspondant à T^*_{ref} , $\overrightarrow{P_{ref}\ P_{sup}}$ et $\overrightarrow{P_{ref}\ M}$ sont de nouveau alignés. Le point M a alors effectué une rotation de θ dans $\mathcal{R}'$

La composition des vitesses angulaires est la suivante :

$$\vec{\omega}_{T^*_{ref}} = \vec{\omega}^*_{sup} + \vec{\omega}^S_{sup}$$

soit :

$$\frac{1}{T^*_{ref}} = \frac{1}{T^*_{sup}} + \frac{1}{T^S_{sup}}$$

Exemple : cas Terre-Jupiter

Dans cet exemple, la Terre est la planète de référence tandis que Jupiter est la planète supérieure. Nous savons que la mesure de la période synodique de Jupiter est mesurable depuis la Terre, nous cherchons la période sidérale de la planète géante. Nous modifions l'expression ci-dessus de la façon suivante :

$$\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T^S_j} = \frac{1}{T^*_j}$$

Les éphémérides nous donnent la valeur de la période synodique de Jupiter, soit $T^S_j = 398{,}9\ j^*$
Le calcul nous donne :

$$T^*_j \approx 4330{,}9\ j^* \approx 11{,}85\ T^*\ qui\ est\ la\ période\ de\ l'année\ sidérale\ de\ Jupiter$$

2.3.2 Cas où la planète de référence est inférieure à la planète considérée.

Le dessin de la figure évolue de la façon suivante :

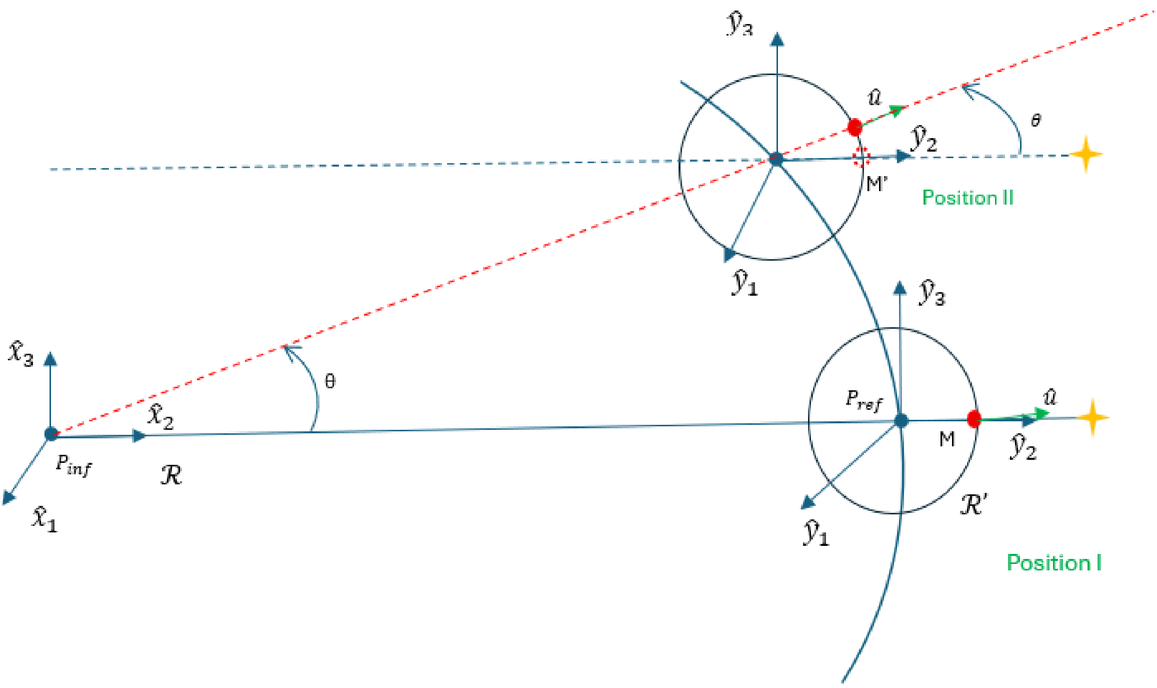

Fig.6 Composition des rotations relatives aux périodes sidérale et synodique d'une planète inférieure.

Dans ce cas précis, P_{inf} est la plus planète la plus proche du Soleil et celle dont on cherche la période sidérale. P_{ref} est la planète supérieure à P_{inf}. Notons T_{inf}^{*} la période sidérale de la planète inférieure et T_{inf}^{s} sa période synodique directement accessible à la mesure depuis la planète de référence dont nous notons la période sidérale T_{ref}^{*}.
Le repère (P_{inf} $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$), symbolise le référentiel de Copernic $\mathcal{R}$, d'origine P_{inf}. Le référentiel $\mathcal{R}'$ a pour origine le centre P_{ref}, il est symbolisé par le repère (P_{ref} $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$). $\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement de translation circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$ de période T_{ref}^{*}.
Le point M est animé d'un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}'$ autour de l'axe $\hat{y}_3$ de période T_{inf}^{s}. Le vecteur $\hat{u}$ est le vecteur unitaire allant de P_{inf} vers M.
A l'instant initial t_0 $\overrightarrow{P_{inf}\,P_{ref}}$ et $\overrightarrow{P_{inf}\,M}$ sont colinéaires, ce que nous pouvons exprimer de la façon suivante :

$$\overrightarrow{P_{inf}\,P_{ref}} = P_{inf}\,P_{ref}\,\hat{u}$$

$$\overrightarrow{P_{ref}\,M} = P_{inf} M\,\hat{u}$$

Après un intervalle de temps correspondant à la période T_{ref}^{*}, P_{ref} se situe en position II. Si le point M était affecté du seul mouvement de translation dans $\mathcal{R}$, le vecteur unitaire $\hat{u}$ ne serait plus colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{P_{inf}\,P_{ref}}$. Cependant, la rotation de M dans $\mathcal{R}'$ fait qu'après un intervalle

De temps correspondant à T^*_{ref}, les vecteurs $\overrightarrow{P_{inf}\,P_{ref}}$ et $\overrightarrow{P_{ref}\,M}$ sont de nouveau alignés.
Le point M a alors effectué une rotation de θ.

La composition des vitesses angulaires donne :

$$\vec{\omega}^*_{inf} = \vec{\omega}^*_{ref} + \vec{\omega}^S_{inf}$$

$$\frac{1}{T^*_{inf}} = \frac{1}{T^*_{ref}} + \frac{1}{T^S_{inf}}$$

Exemple : cas Terre-Vénus

Dans cet exemple, la Terre est la planète de référence, tandis que Vénus, plus proche du Soleil, est la planète inférieure.
En appliquant la formule ci-dessus, nous avons ;

$$\frac{1}{T^*_V} = \frac{1}{T^*} + \frac{1}{T^S_V}$$

Nous connaissons $T^* =$ **365,256363** $\boldsymbol{j}^*$, les éphémérides nous donnent la période synodique de Vénus : $T^S_V = 583{,}9\, j^*$
Le calcul nous donne ;

$$T^*_V \approx 224{,}72\, j^* \quad qui\ est\ la\ période\ sidérale\ de\ Vénus.$$

2.4 Périodes moyennes de successions des éclipses.

Deux conditions doivent être remplies pour qu'il y ait éclipses :

- La syzygie doit être vérifiée.
- La Lune et la Soleil doivent être sur la ligne des nœuds.

2.4.2 Année draconitique ou années des éclipses.

Considérons le figure 7 :

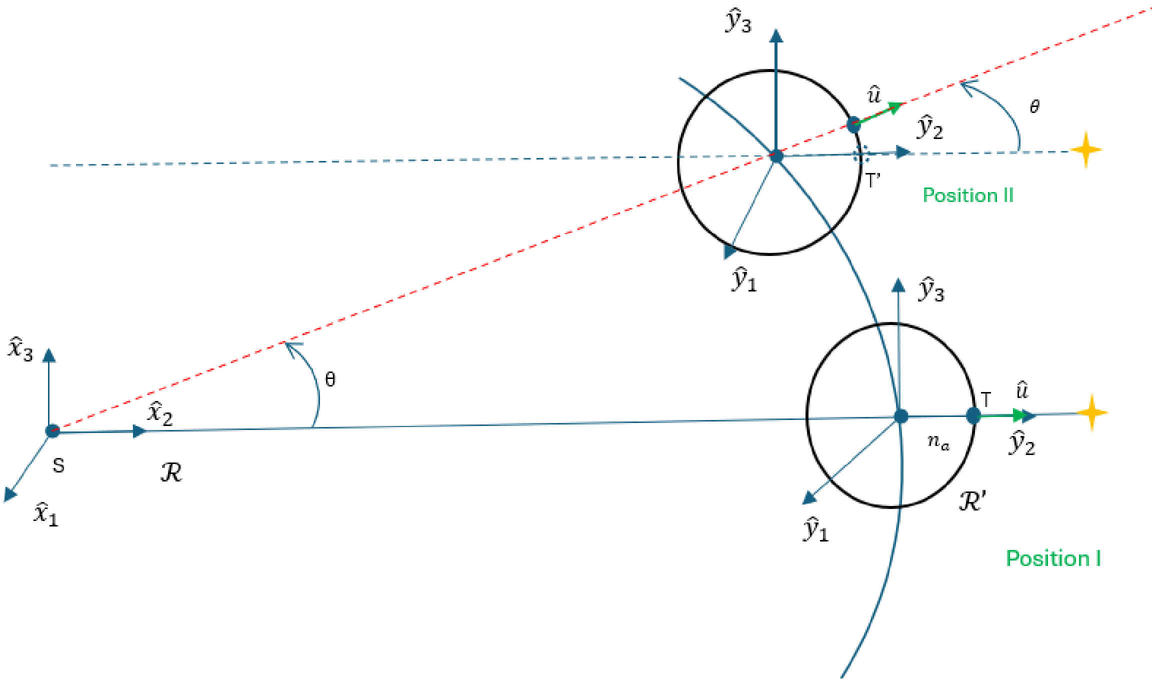

Fig.7 Composition des rotations relatives aux périodes de la ligne des nœuds lunaires et à la période sidérale terrestre.

Nous considérons le référentiel de Copernic $\mathcal{R}$ centré sur le Soleil et doté du repère $(S\ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$.
Le référentiel $\mathcal{R}'$ centré sur le nœud lunaire ascendant n_a est symbolisé par le référentiel $(n_a\ \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$.Il est animé d'un mouvement de translation circulaire uniforme dans le référentiel $\mathcal{R}$ de période $T_{n_a} = 18{,}6\, T^*$, nous savons en effet que la période de précession de la ligne des nœuds est de 18,6 années sidérales terrestres. Par ailleurs, la Terre est animée d'un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}'$ de période T^*. Le raisonnement est alors tout à fait similaire aux précédents.
La composition des vitesses angulaires est la suivante :

$$\vec{\omega}_E = \vec{\omega}_{n_a} + \vec{\omega}_T^*$$

$$\frac{1}{T_E} = \frac{1}{T_{n_a}} + \frac{1}{T^*}$$

Avec $T_{n_a} = 18{,}6\, T^*$
On obtient, tout calcul fait, une année des éclipses d'une durée approximative de **346,74 j^***

2.4.3 La Lune sur la ligne des nœuds lunaires

Le schéma est équivalent à celui de la figure 7, on substitue à la Terre T la Lune L dont la période de rotation est L^{*}.
La composition des vitesses angulaires nous donne la période du mois draconitique.

$$\vec{\omega}_{LD} = \vec{\omega}_{n_a} + \vec{\omega}_L^{*}$$

$$\frac{1}{T_{LD}} = \frac{1}{T_{n_a}} + \frac{1}{L^{*}}$$

Soit après application numérique $\boldsymbol{T_{LD}} \approx$ **27,2** $\boldsymbol{j}^{*}$