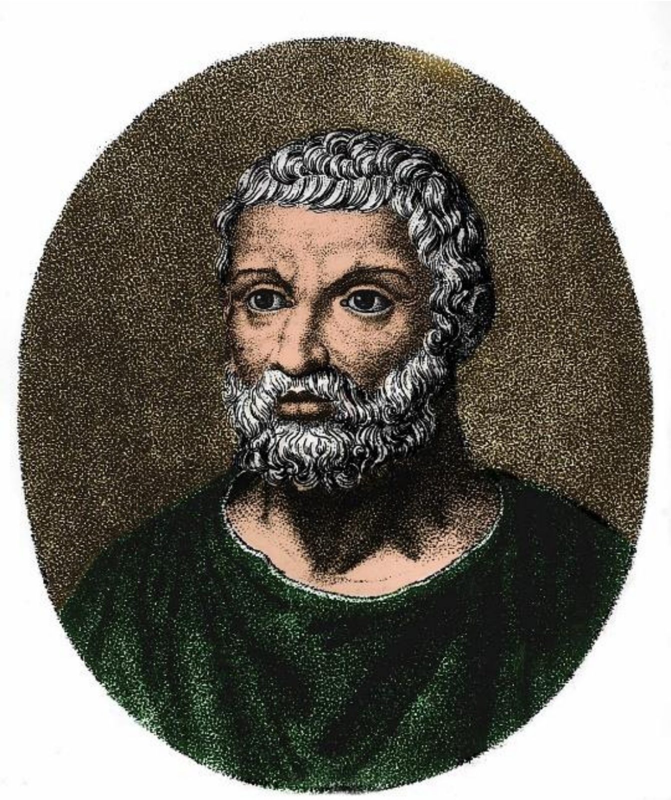
Le théorème de Thalès

Thierry Piou président de l'association d'astronomie ''Pêcheurs d'étoiles'' La Baule.



Thalès de Milet VIème siècle av J C.

Introduction.

Le théorème de Thalès est l'un des plus importants de la géométrie plane. Il est souvent utilisé en astronomie Nous allons voir comment on le démontre, puis nous verrons comment on l'utilise pour déterminer la longueur du cône d'ombre projetée par la Terre dans l'espace. Nous allons commencer par rappeler quelques formules d'aires de figures élémentaires de géométrie plane.

1 Aire d'un parallélogramme.

Considérons le parallélogramme ABCD de la figure 1.

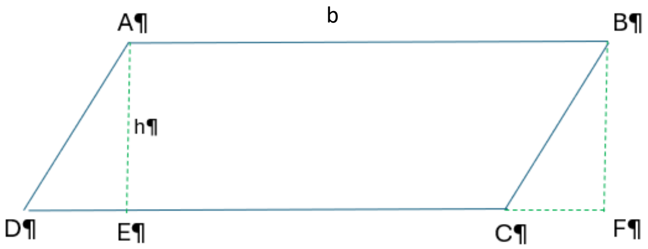


Fig.1

Des sommets A et B abaissons les perpendiculaires AE et BF sur le côté DC. Les deux angles DAE et CBF ayant leurs côtés parallèles deux à deux sont égaux. Par construction les triangles DAE et CBF étant rectangles, on déduit de l'égalité précédente qu'ils sont égaux.
Si du quadrilatère DABF, si nous retranchons le triangle DAE, nous obtenons le rectangle ABFE, si l'on retranche CBF, nous obtenons le parallélogramme ABCD.
Si les deux triangles sont égaux, il en résulte que les aires du rectangle et du parallélogramme sont égales En conséquence :

$$Aire_{ABCD} = b * h \qquad (1)$$

2 Aire d'un triangle.

Il y a deux configurations possibles selon que les angles du triangle sont aigus ou si l'un d'entre-deux est obtus.

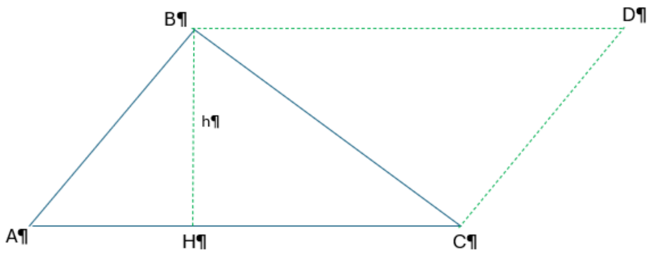


Fig.2

Considérons le triangle de la figure 2 où les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus. Pour déterminer l'aire du triangle on procède à une construction auxiliaire.
Par les sommets B et C, menons les parallèles BD et CD aux côtés AC et AB. Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme. Les triangles ABC et BDC ayant un côté adjacent commun à deux angles égaux

chacun à chacun, ils sont égaux. L'aire de chacun d'eux est donc la moitié de l'aire du parallélogramme.

$$Aire_{ABC} = \frac{b * h}{2} \qquad (2)$$

où b est la base du triangle ici b = AC et h sa hauteur, c'est-à-dire la droite passant par l'un des sommets et perpendiculaire au côté opposé.

Voyons maintenant le cas où l'un des angles du triangle est obtus (fig.3) :

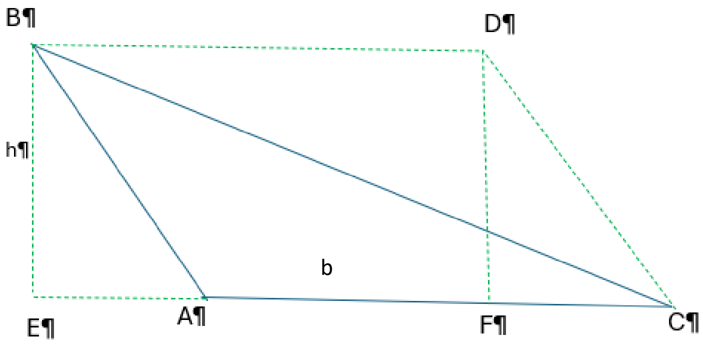


Fig.3

On procède à la même construction que précédemment : Par les sommets B et C, menons les parallèles BD et CD aux côtés AC et AB. Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme. Menons les perpendiculaires BE et DF sur AC, nous nous retrouvons dans un cas tout à fait similaire à celui de la figure 1 : les aires du rectangle BDFE est égale à celle du parallélogramme ABDC.
Les triangles ABC et BDC étant égaux, l'aire de chacun d'eux est la moitié de l'aire du parallélogramme, en conséquence on retrouve bien la formule (2).

3 La configuration de Thalès.

La configuration de Thalès consiste en deux droites concourantes et de deux droites parallèles coupant respectivement les deux précédentes.
Deux configurations sont en réalité possibles, dans un cas le point sécant est à l'extérieur des deux parallèles (fig.4), et dans le second cas le point sécant est entre les deux parallèles (fig.5)

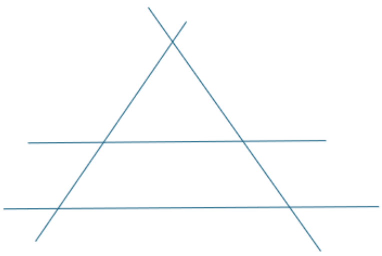


Fig.4

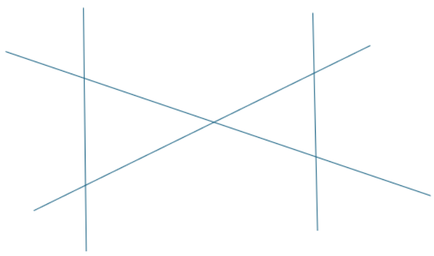


Fig.5

4.Le théorème de Thalès. Démonstration

Hypothèses

Δ et Δ’ sécantes en O

AA’ // BB’

Conclusion

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

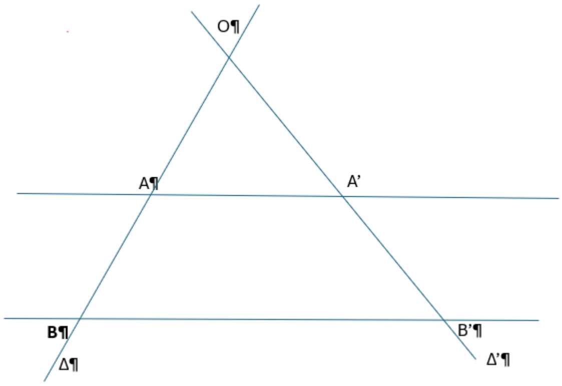


Fig.6

Démonstration

Considérons la configuration de Thalès de la figure 6. Les triangles OAA’ et OBB’ sont homothétiques : L’angle O est commun aux deux triangles d’une part et les angles A, B ; A’ B’ sont respectivement correspondants d’autre part, donc :

$$\hat{A} = \hat{B}$$

$$\widehat{A'} = \widehat{B'}$$

Nous allons reprendre la fig.6 en lui ajoutant une construction auxiliaire faisant apparaître les triangles AA’B et AA’B’ de hauteurs HB = H’B’ = h. (fig.7)

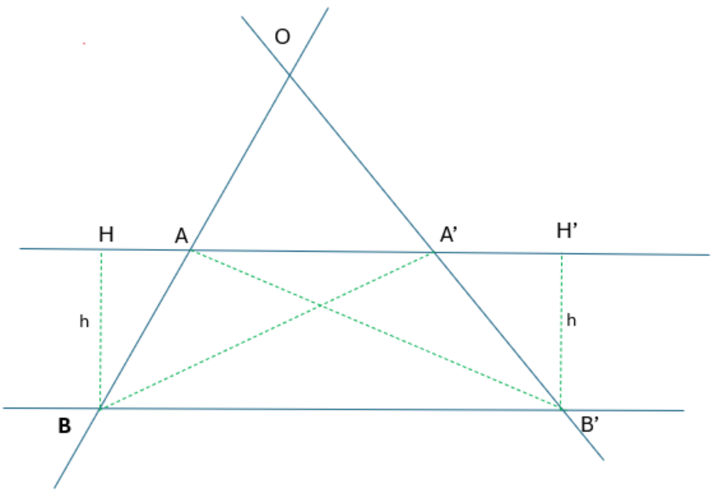


Fig.7

Les aires du triangles AA’B’ et AA’B’ s’expriment respectivement

$$Aire_{AA'B} = \frac{AA' * h}{2}$$

$$Aire_{AA'B'} = \frac{AA' * h}{2}$$

Les aires des triangles AA’B et AA’B’ sont égales et c’est le point de départ de notre démonstration.
Nous allons reprendre notre figure et ajouter une seconde construction (fig.8).et nous allons recalculer l’aire du triangle AA’B en considérant AB comme base, nous avons alors :

$$Aire_{AA'B} = \frac{AB * h_1}{2}$$

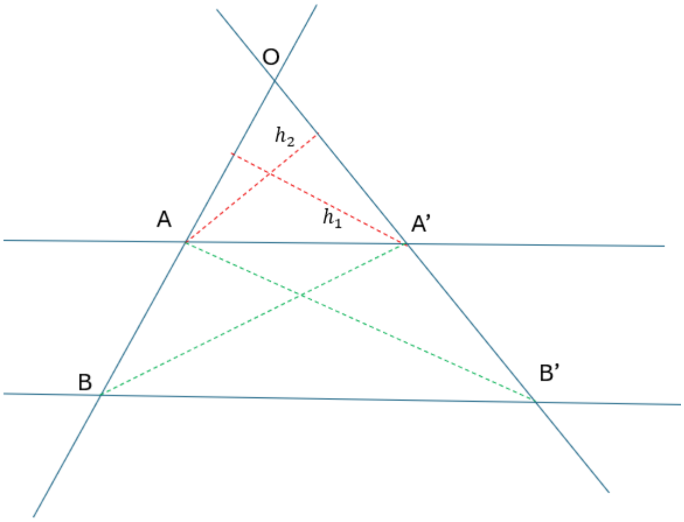


Fig.8

De la même manière pour le triangle AA’B’ en considérant la base A’B’, nous obtenons :

$$Aire_{AA'B'} = \frac{A'B' * h_2}{2}$$

Les aires des deux triangles étant égales, nous pouvons écrire :

$$\frac{AB * h_1}{2} == \frac{A'B' * h_2}{2}$$

ou encore :

$$\boxed{AB * h_1 = A'B' * h_2 \qquad (3)}$$

Nous allons considérer maintenant la surface du triangle OAA' (figure 8), on considère la base OA et dans ce cas la hauteur est h_1, nous pouvons alors écrire :

$$Aire_{oAA'} = \frac{OA * h_1}{2}$$

puis, nous calculons de nouveau l'aire du triangle OAA' en utilisant la base OA'. La hauteur est cette fois-ci la hauteur h_2 :

$$Aire_{oAA'} = \frac{OA' * h_2}{2}$$

en conséquence, en égalisant nos deux équations, nous avons :

$$OA * h_1 = OA' * h_2 \qquad (4)$$

En faisant le rapport membre à membre des égalités (3) et (4),il vient :

$$\frac{AB * h_1}{OA * h_1} = \frac{A'B' * h_2}{OA' * h_2}$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$$

On ajoute 1 à chaque membre :

$$\frac{AB}{OA} + 1 = \frac{A'B'}{OA'} + 1$$

$$\frac{AB + OA}{OA} = \frac{A'B' + OA'}{OA'}$$

On remarque $AB + OA = OB \; et \; A'B' + OA' = OB'$ en conséquence :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} \qquad (I)$$

L'expression (I) constitue la première égalité du théorème de Thalès. Nous allons maintenant démonter la seconde égalité du théorème en en nous appuyant sur la figure 9 :

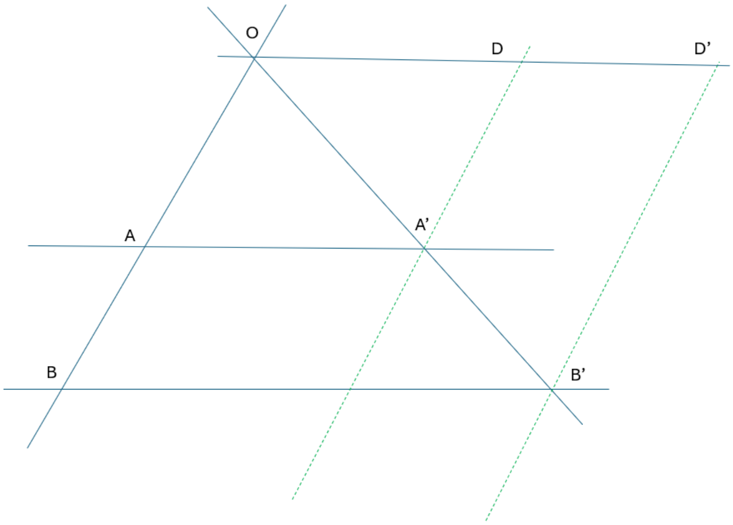


Fig.9

Là encore, nous procédons à une construction auxiliaire en traçant les parallèles à OB passant respectivement par les points A' et B' et une parallèle à AA', BB' passant par le point O. Considérons les triangle ODB et OD'B' de la figure 9, ces deux triangles sont semblables : l'angle en O est commun et les angles A', B' d'une part, D, D' d'autre part sont égaux. La relation (I) peut donc s'appliquer à ces deux triangles :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OD'}{OD}$$

d'autre part $OD = AA' et\; OB' = OD'$ en conséquence :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}$$

En comparant avec (I), nous avons :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}$$

Ou encore en inversant nos fractions :

$$\boxed{\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'} \quad (II) \quad double\ égalité\ qui\ est\ l'expression\ du\ théorème\ de\ Thalès}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Thalès à travers un exemple issu de l'astronomie.

5.Application .Longueur du cône d'ombre projeté par la Terre dans l'espace.

Considérons la configuration suivante :

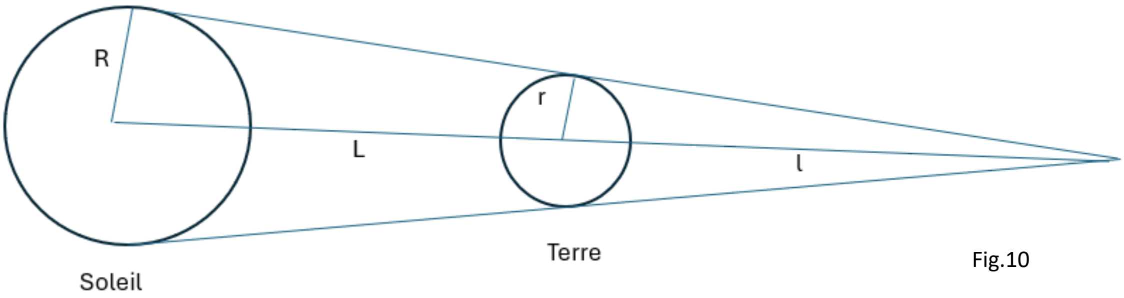


Fig.10

R et r sont respectivement les rayons du Soleil et de la Terre tandis que L et l sont repectivement les distances Soleil et Terre et la longueur du cône d'ombre de la Terre projeté dans l'espace.
Sur ce shéma, nous reconnaissons immédiatement une configuration de Thalès.
On applique la formule (II) :

$$\frac{l}{l+l} = \frac{r}{R}$$

$$Rl = r(l+L) \quad produit\ en\ croix$$

$$Rl - rl = rL$$

soit :

$$l = \frac{rL}{R-r} \qquad (5)$$

En prenant pour unité de longueur le rayon terrestre, la formule (5) se transforme de la manière suivante ;

$$l(r) = \frac{L}{R-1}$$

La distance Terre-Soleil vaut approximativement en moyenne 23548 r et le rayon du Soleil approximativement 109r.
La longueur du cône d'ombre est de :

$$l(r) = \frac{23548}{109-1} \approx 218r\ soit\ approximativement\ 1\ 388\ 660\ km$$