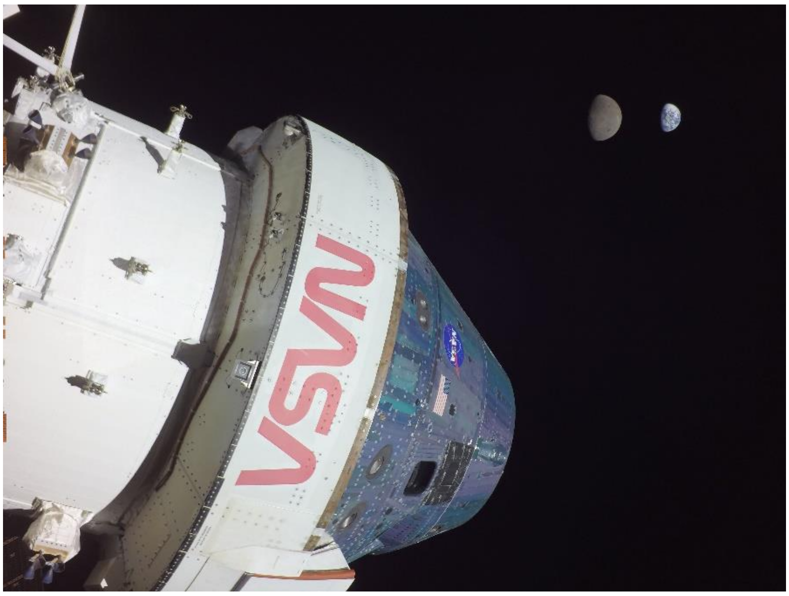
Mission Artémis _ Calcul de la distance Orion-Lune à partir d'une photo.

Thierry Piou président de l'association d'astronomie ''Pêcheurs d'étoiles'' La Baule. France.

Introduction

Le 1er décembre 2022 la NASA montra une photographie du couple Terre-Lune prise le 28 novembre précédent par le vaisseau Orion de la mission Artemis. Avec cette photographie pour seul document, on cherche la distance du vaisseau à la Lune.



Solution.

La résolution du problème réside dans la notion de diamètre apparent d'un objet, et nous allons d'abord nous attarder sur sa définition.

1 Diamètre apparent d'un objet.

Rappelons tout d'abord que le diamètre apparent d'un objet est, en première approximation, proportionnel au rapport de son diamètre réel sur sa distance. Considérons la figure 1 :

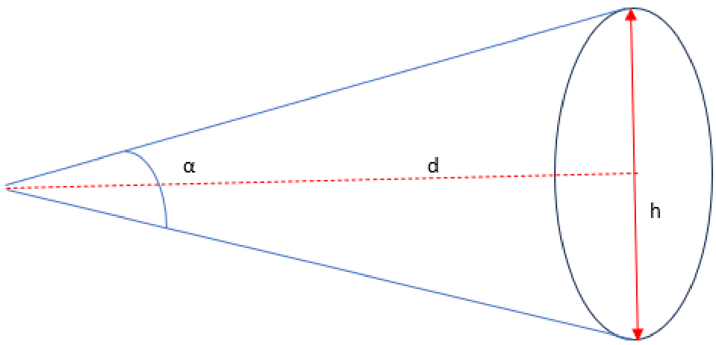


Fig.1. Taille angulaire d'un objet en fonction de sa hauteur h et de sa distance d.

On voit immédiatement sur cette figure que :

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{h}{2}}{d} = \frac{r}{d}$$

soit :

$$\alpha = 2\ arctg\ \frac{r}{d}$$

Un développement en zéro limité au 1[er] ordre, permet d'écrire :

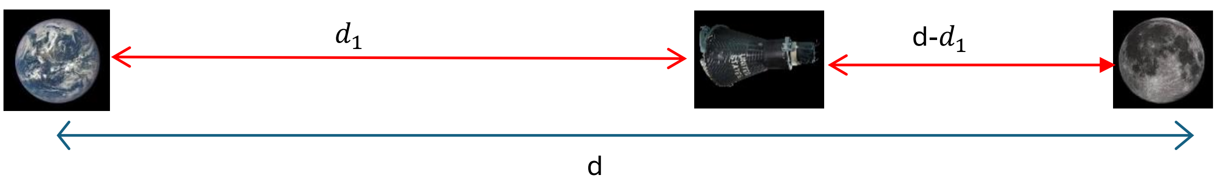
$$\boxed{\alpha \approx \frac{r}{d} \quad (\ \alpha\ en\ radians\ et\ \ d \geq 10\ h\ ) \qquad (1)}$$

Exemple 1
Quel est diamètre apparent de la Terre vue depuis la Lune ?
Réponse.
Le rayon de la Terre est de 6370 km, la distance moyenne Terre-Lune est de 384 000km.
Le diamètre apparent moyen de la Terre est donc de :

$$\alpha \approx \frac{6{,}37 * 10^3}{384 * 10^3} = 0{,}0166\ rd <=> 0{,}95°$$

Une simple règle de trois permet de passer des radians aux degrés d'arc.
On peut s'amuser à calculer le diamètre apparent de la Lune vu de la Terre à l'apogée (406700 km) et au périgée (la super Lune chère aux médias _ 365 400 km)

Exemple 2:
Un vaisseau spatial effectue le trajet Terre-Lune, à quelle distance de la Terre le diamètre apparent de la Lune sera-t-il égal à celui de la Terre ?



On appelle R_T le rayon de la Terre, R_L le rayon de la Lune, d la distance moyenne Terre-Lune, $d_1$le distance Terre-vaisseau spatial.
Nous avons l'égalité suivante concernant les diamètres apparents de la Terre et de la Lune.

$$\alpha_T = \alpha_L = \frac{R_T}{d_1} = \frac{R_L}{d - d_1}$$

Le produit des moyens par celui des extrêmes nous donne :

$$R_T(d - d_1) = R_L * d_1$$

On développe et on met $d_1$en facteur.

$$d_1(R_T + R_L) = R_T * d$$

Soit :

$$d_1 = \frac{R_T}{R_T + R_L} * d \iff d_1 = \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R_T}} * d$$

Application numérique

$$R_L = 1740\ km$$

$$R_T = 6370\ km$$

$$d = 384\ 000\ km$$

D'où :

$$d_1 = \frac{1}{1 + 0{,}273} * 384 * 10^3 \approx 301\ 650\ km$$

On déduit les diamètres apparents de la Terre et de la Lune :

$$\alpha_T = \alpha_L = \frac{R_T}{d_1} = \frac{R_L}{d - d_1}$$

soit,

$$\alpha_T = \alpha_L = \frac{6{,}37 * 10^3}{301{,}65 * 10^3} \approx 0{,}021\ rd \iff 1{,}2°$$

2 Calcul de la distance Orion-Lune.

2.1 le rapport harmonique k

Sur une image agrandie de la photo de la NASA du couple Terre-Lune, nous mesurons à l'aide d'un réglet millimétré un diamètres 43 mm pour la Terre et de 70 mm pour la Lune, posons :

$$m = \frac{\emptyset_{photo\ Terre}}{\emptyset_{photo\ Lune}}$$

et

$$n = \frac{\emptyset_{Terre\ réelle}}{\emptyset_{Lune\ réelle}}$$

Le rapport harmonique k qui divise le segment Terre-Lune est :

$$k = \frac{n}{m} = \frac{\frac{\emptyset_{Terre\ réelle}}{\emptyset_{Lune\ réelle}}}{\frac{\emptyset_{photo\ Terre}}{\emptyset_{photo\ Lune}}} = \frac{\emptyset_{Terre\ réelle}}{\emptyset_{Lune\ réelle}} * \frac{\emptyset_{photo\ Lune}}{\emptyset_{photo\ Terre}} = \frac{12740}{3470} * \frac{70}{43} = 5{,}98$$

Fig.1. L'axe Terre-Lune est orienté. Les points O_1 et O_2 divisent harmoniquement le segment TL (Terre-Lune) dans les rapports k et -k.

O_1 et O_2 sont les deux seuls points que peut occuper le vaisseau Orion sur l'axe Terre-Lune, c'est-à-dire que ce sont les deux seuls points où les diamètres apparents de la Lune et de la Terre sont dans un rapport de 5,98. (fig.1)
Calculons maintenant la distance O_1-Lune.

2.2 Calcul de la distance O_1L.

L'axe Terre-Lune étant orienté, nous considérons les grandeurs algébriques des différents segments considérés.

$$\frac{\overline{O_1L}}{\overline{O_1T}} = -\frac{1}{k}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\overline{O_1L}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{O_1L}}{\underbrace{\overline{LO_1} + \overline{O_1T}}_{\text{Relation de Chasles}}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\overline{O_1L}$ on obtient :

$$-\frac{O_1L}{LT} = \frac{O_1L}{-LO_1 - O_1T} = \frac{1}{-1 - \frac{O_1T}{O_1L}} = \frac{1}{-1-k} = -\frac{1}{1+k}$$

On en déduit :

$$O_1L = -LT * \left(-\frac{1}{1+k}\right)$$

Un logiciel ou un site internet dédié, nous indique que le 28 novembre 2022, la distance Terre-Lune était de 367 900 km, il vient :

$$O_1L = -367900 * \left(-\frac{1}{1+5{,}98}\right) \approx 52\,700\ km$$

2.3 Calcul de la distance O_2L.

Le calcul est tout à fait similaire au précédent, nous avons :

$$\frac{\overline{O_2L}}{\overline{O_2T}} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\overline{O_2L}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{O_2L}}{\overline{LO_2} + \overline{O_2T}}$$

$$\frac{O_2L}{LT} = \frac{-O_2L}{LO_2 - O_2T} = \frac{1}{-1 - \frac{O_2T}{(-O_2L)}} = \frac{1}{k-1}$$

On en déduit :

$$O_2L = -LT * \left(\frac{1}{k-1}\right)$$

Soit :

$$O_2L = -367900 * \left(\frac{1}{5{,}98 - 1}\right) \approx -73870\ km <=> LO_2 \approx 73870\ km$$

La distance Orion Lune est donc comprise entre :

$$52700 \leq OL \leq 73870\ km \qquad (2)$$

2.4 Analyse qualitative

Le vaisseau Orion ne peut être simultanément en O_1 et O_2, il occupe l'une ou l'autre position. Laquelle ?
La photo nous renseigne sur ce point. Imaginons le Soleil à gauche de la Terre sur la figure 1. Depuis O_1c'est la Nouvelle Terre et la Pleine Lune, depuis O_2 c'est la Nouvelle Terre et la Nouvelle Lune. Cette situation ne correspond pas à la photo.
Voyons maintenant le cas où le Soleil est à droite de O_2.
Depuis O_1c'est la Pleine Terre et la Nouvelle Lune. Depuis O_2 on distingue la Pleine Lune et la Pleine Terre, le vaisseau se trouve donc approximativement en O_2.
Pourquoi '' approximativement ''? notre propos est en effet à nuancer, car sur la photo, la Lune et la Terre sont gibbeuses : Terre, Lune et Vaisseau Orion ne sont donc pas rigoureusement alignés, la situation est plutôt celle de la figure 2

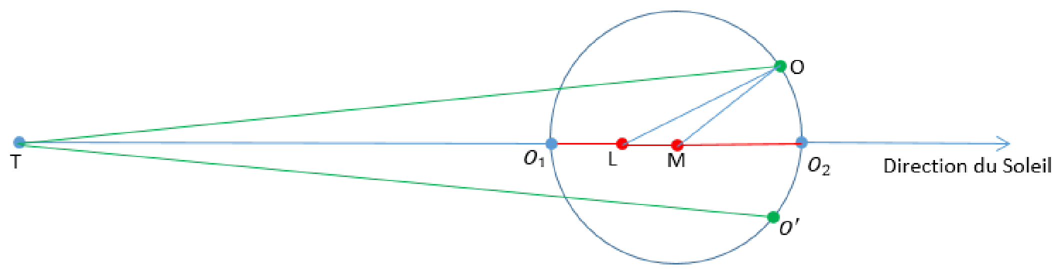


Fig.2 Terre, Lune et Vaisseau Orion ne sont pas alignés, ce dernier occupe l'un des points O ou O' sans qu'il soit possible de les discriminer. Ils sont symétriques par rapport à l'axe Terre-Lune.

Le vaisseau Orion est sur le cercle dont les extrémités d'un diamètre O_1O_2 divise le segment Terre-Lune harmoniquement dans le rapport 5,98. Plus précisément, il occupe l'un des points O ou O' sans que la discrimination ne soit possible, la photo ne permettant pas de distinguer si la Lune et la Terre sont gibbeuses croissantes ou décroissantes.
Cependant, nous savons que :

$O_1L \approx 52700km\ et\ O_2L \approx 73870km$

Recherchons le diamètre du cercle de centre M de la figure 2 :

$$D = O_1L + LO_2 = 52700 + 73870 = 126\,570\ km$$

on en déduit la distance LM :

$$LM = \frac{D}{2} - O_1L = \frac{126570}{2} - 52700 \approx 10580\ km$$

A partir de ces considérations, nous pouvons affiner l'encadrement de la double inégalité (2) Considérons la figure 3 :

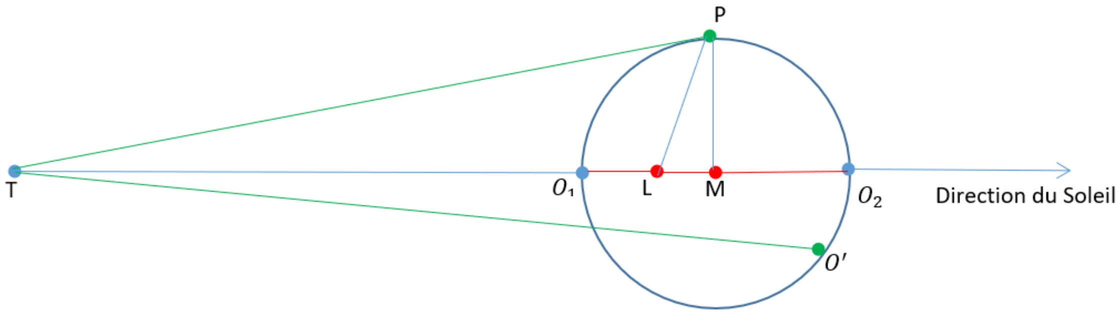


Fig.3 La résolution du triangle rectangle LPM permet d'affiner l'encadrement de la distance Lune-Orion.

Si le vaisseau est en P, la Lune sera, depuis celui-ci, quasiment est quadrature, proche du Dernier Quartier. Le triangle LPM est rectangle en M et nous pouvons écrire :

$$LP^2 = LM^2 + MP^2 = LM^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow LP = \sqrt{LM^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

soit :

$$LP = \sqrt{10580^2 + \left(\frac{126570}{2}\right)^2} \approx 64160\ km$$

L'encadrement devient :

$$\boxed{64160 \leq distance\ Orion\_Lune \leq 73870\ km}$$

Notons qu'en recherchant la phase de la Lune, il serait encore possible de réduire l'encadrement.