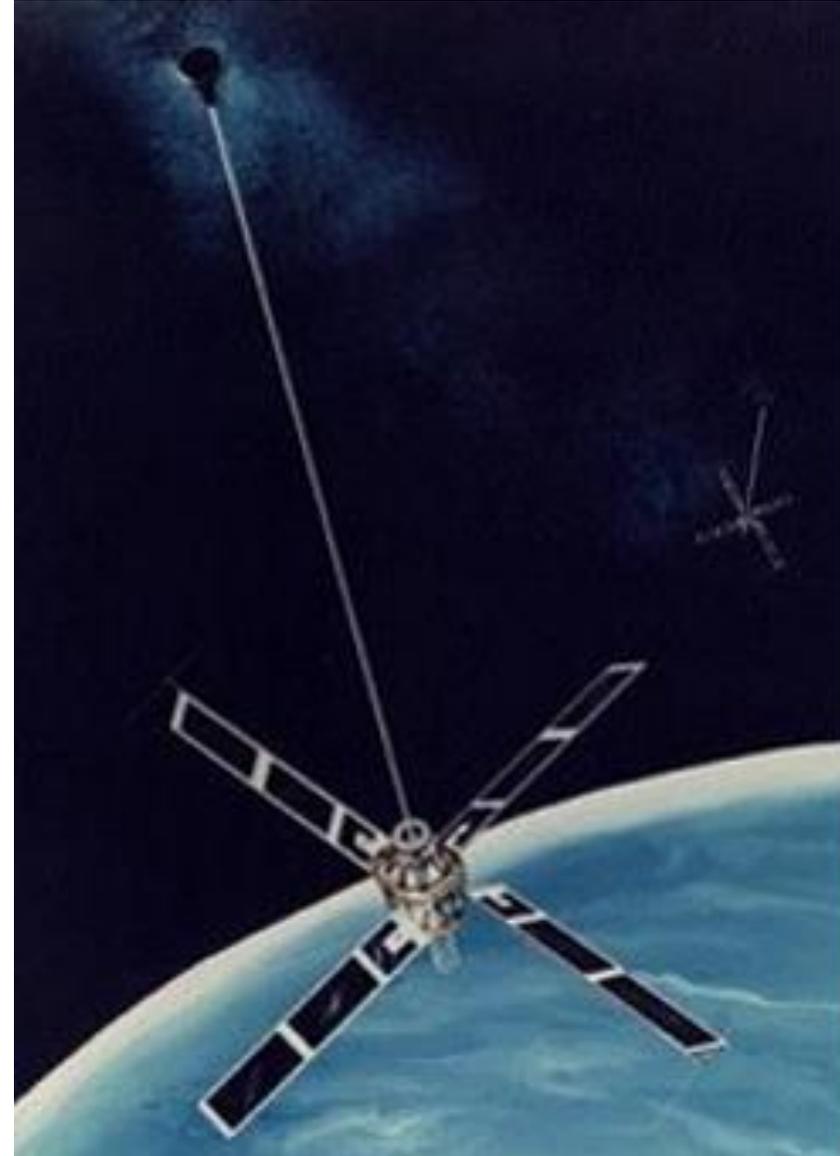


Les forces de  
marées  
dans l'Univers





## Notion de point matériel

On appelle point matériel en mécanique un système qu'il est possible de modéliser par un point géométrique  $P$ , donc sans dimension, auquel est associé sa masse  $m$ .

Il s'agit souvent d'un système dont les dimensions sont petites devant les distances caractéristiques du mouvement étudié (distance parcourue, rayon d'une orbite...), néanmoins cette condition est insuffisante.

Pour un objet volumineux solide (sans déformation) en translation (sans rotation), tous les points ont le même déplacement. Dès qu'on connaît la forme de l'objet, l'étude du mouvement d'un de ses points (quelconque) suffit à décrire la trajectoire de celui-ci dans l'espace.

Le modèle du point matériel est le plus simple que l'on puisse envisager pour un système mécanique. Aucune information sur sa forme réelle n'est nécessaire, il est uniquement caractérisé par sa masse  $m$  qui est constante.

# Systeme materiel

Par definition, nous appellerons systeme materiel un ensemble de points materiels. Un systeme est dit indeformable lorsque tous les points constituant le systeme reste fixe les uns par rapports aux autres. Ceci correspond a la definition du solide en mecanique. Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'exterieur, un systeme materiel est dit **isole**, il s'agit d'un cas ideal. Si des actions exterieures agissant sur le systeme se compensent, le systeme est dit **pseudo-compense**. Sur la Terre, il n'est pas possible de rencontrer des systemes rigoureusement isoles. L'action de la Terre est une action exterieure pour tout systeme materiel. Par contre on peut rencontrer des systemes pseudo-isoles chaque fois que l'action de la Terre est compensee. C'est le cas des mobiles autoporteurs ou encore d'un systeme se trouvant sur une table a coussin d'air.



Mobile autoporteur



Table a coussin d'air

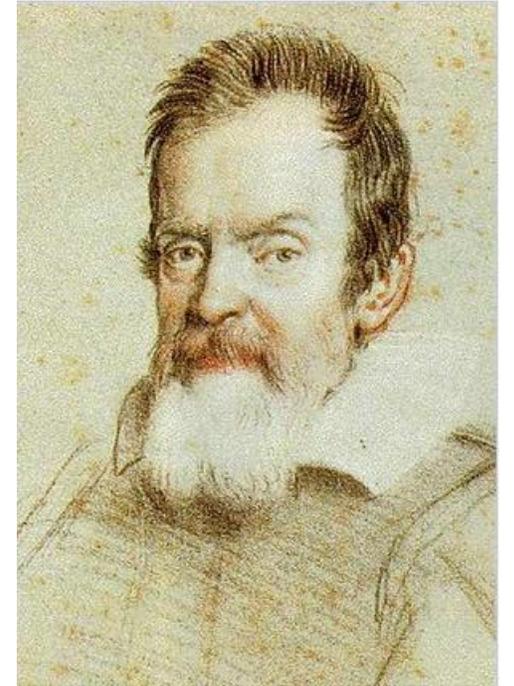
# De la nécessité d'un référentiel

L'étude du mouvement d'un objet implique nécessairement la présence simultanée de l'objet et de l'observateur qui analyse le mouvement de cet objet. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet qui se déplace, ses conclusions quant à la nature du mouvement de celui-ci seront différentes.

Ainsi, dans un train qui se déplace à vitesse constante, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne. La personne qui est sur le quai et qui observe la même scène conclut que la bille n'a pas un mouvement rectiligne et pourtant il s'agit bien de la même bille. Un mouvement est donc toujours lié à l'observateur. On dit qu'il est **relatif** (relativité galiléenne).

Le mouvement d'un objet ne pourra se faire que par rapport à une référence. Il est donc nécessaire de définir ce qu'on appelle un **référentiel** ou **solide de référence** dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. Dans le cas cité plus haut, le train est le référentiel du passager, tandis que tout ce qui est fixe par rapport à la Terre constitue le référentiel pour l'observateur resté sur le quai.

**Le mouvement d'un objet est toujours relatif à un référentiel.**



Galilée (1564-1642)

# Référentiels usuels

Un référentiel peut-être caractérisé par son nom. Il est fréquent d'utiliser pour des observations faites à la surface de la Terre le référentiel terrestre. L'étude se fera par rapport à la Terre ou par rapport à ce qui est fixe sur Terre. On distingue plus particulièrement les référentiels de Copernic, géocentrique et terrestre qui sont définis de la manière suivante :

- **Le référentiel de Copernic**

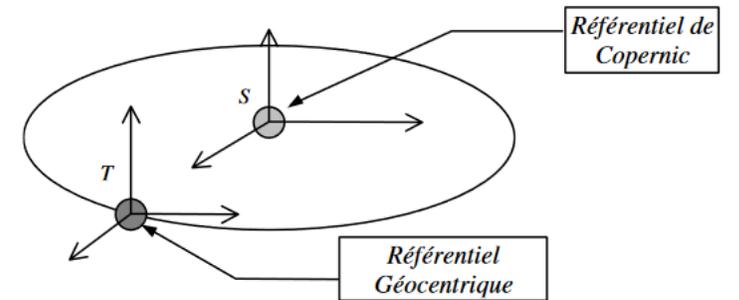
- origine : centre du système solaire (voisin du centre d'inertie du Soleil).
- axes dirigés vers les étoiles dans des directions supposées fixes par rapport au Soleil.
- propriété : supposé galiléen (ou inertiel).

- **Le référentiel géocentrique**

- origine : centre de la Terre.
- axes dirigés parallèlement à ceux du référentiel de Copernic.

- **Le référentiel terrestre**

- origine : point de la surface de la Terre.
- axes fixes par rapport à la Terre.



On caractérise souvent un référentiel par un symbole plutôt que par son nom. On écrira en général :

$$\text{référentiel } R ( O, x, y, z, t )$$

On appelle référentiel un solide de référence constitué de l'ensemble des points tous fixes les uns par rapport aux autres.

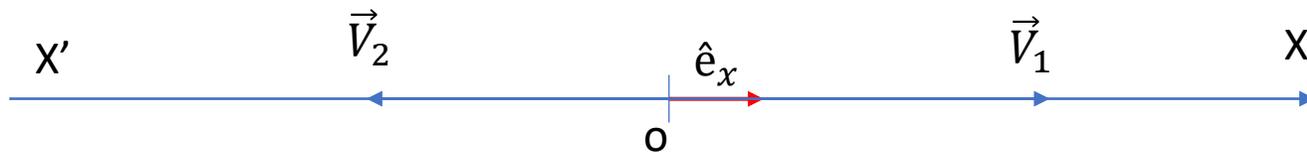
## Un outil commode: les vecteurs

La physique manipule des grandeurs qui caractérisent les propriétés d'un phénomène. Ces grandeurs sont mesurées ou calculées.

Certaines grandeurs, dites scalaires, peuvent se caractériser par un nombre seul par rapport à une unité (température, longueur, masse). Pour d'autres un nombre seul ne suffit pas à les caractériser, à cette grandeur scalaire il faut ajouter une direction et à cette direction un sens. On nomme ces grandeurs, " grandeurs vectorielles " parmi celles-ci on trouve l'accélération, la vitesse, la position.

Ainsi, dessin ci-contre, la longueur  $r$  qui sépare le point  $O$  du carré noir ne suffit pas à définir la position de celui-ci. Il convient d'ajouter l'angle que fait le rayon-vecteur avec un axe du système de coordonnées. Ainsi le couple  $(r, \varphi)$  définit rigoureusement la position de notre point dans le plan. Notons que le couple  $(3, C)$  n'est rien d'autre que les composantes du vecteur  $\overrightarrow{OP}$  défini par son module  $r$  et son angle polaire  $\varphi$ .

	1	2	3	4	5
A					
B					
C					
D					
E					

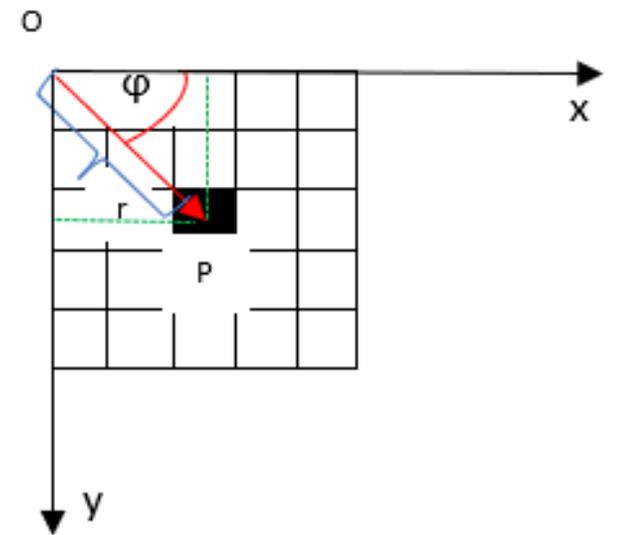


$$\vec{V}_1 = V_1 * \hat{e}_x$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{V}_2 = V_2 * \hat{e}_x$$

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}_2 \text{ et après projection sur l'axe } X'X \quad V_1 = -V_2$$



# Repère et temps

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace. Il lui faut pour déterminer la nature du mouvement connaître la position du point au cours du temps, c'est-à-dire pouvoir répondre aux questions suivantes :

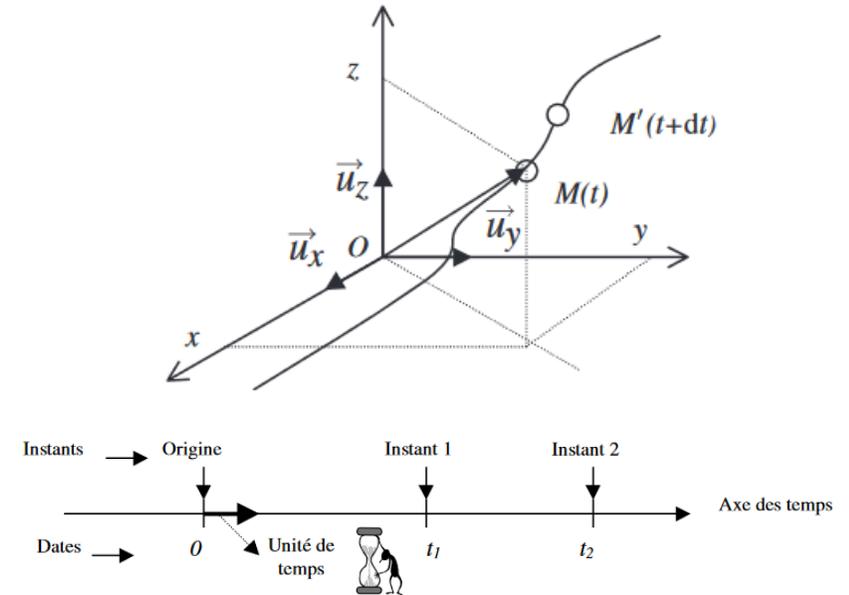
*Où se trouve le point ?*

*Quand est-il passé à cette position ?*

Pour pouvoir répondre à la question *où* ? Il se choisit un repère d'espace. Le repère d'espace est défini par une origine  $O$  qui est fixe dans le référentiel et des axes de références qui permettent à l'observateur de déterminer la direction de l'objet. Ces axes sont eux-mêmes liés au référentiel. Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est à dire une infinité. Par contre à un repère d'espace donné ne correspond qu'un unique référentiel constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.

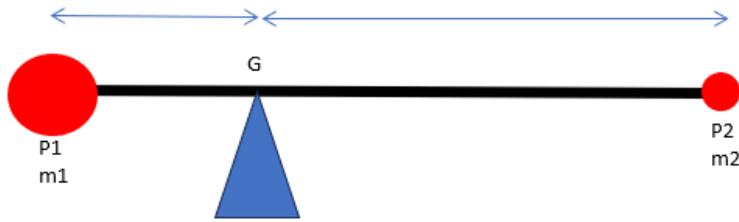
Pour pouvoir répondre à la question *quand* ? il faut ajouter un repère de temps, c'est dire une grandeur qui est la variable temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant ainsi une chronologie. A chaque instant, on associe un nombre réel, appelé date, qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

En mécanique classique ou newtonnienne on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.



# Masse et centre d'inertie

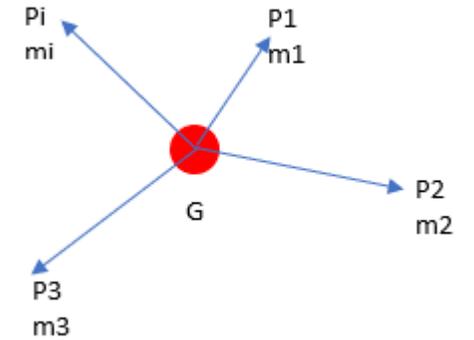
La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans le cas d'un système fermé, c'est une caractéristique du système. Le centre d'inertie ou centre de masse d'un système matériel correspond au point noté G, barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse.



$$m_1 GP_1 = m_2 GP_2$$

$$m_1 GP_1 - m_2 GP_2 = 0$$

$$m_1 \overrightarrow{GP_1} + m_2 \overrightarrow{GP_2} = \vec{0}$$



Pour un système discret constitué de  $n$  masses  $m_i$  situées aux points  $P_i$  le point G vérifie :

$$m_1 \overrightarrow{GP_1} + m_2 \overrightarrow{GP_2} + m_3 \overrightarrow{GP_3} + \dots + m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

# Définition du centre d'inertie

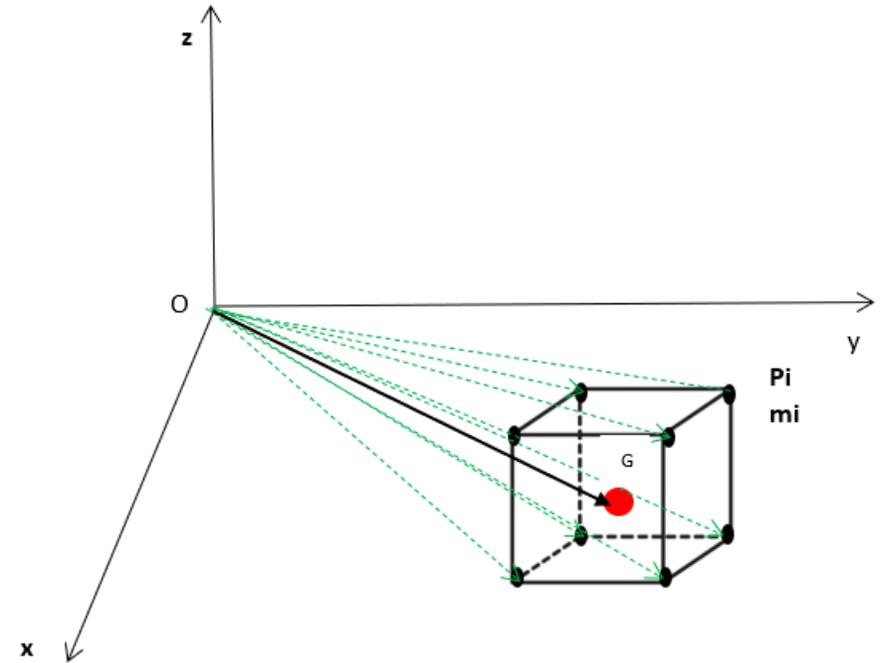
Pour un système discret constitué de  $n$  masses  $m_i$  situées aux points  $P_i$  on aura, par rapport à un point  $O$  origine :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

avec  $m$  = masse totale du système.

Si le système forme un milieu continu à l'échelle macroscopique, le signe somme se transforme en signe intégrale :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint \overrightarrow{OM} dm$$



# Quantité de mouvement

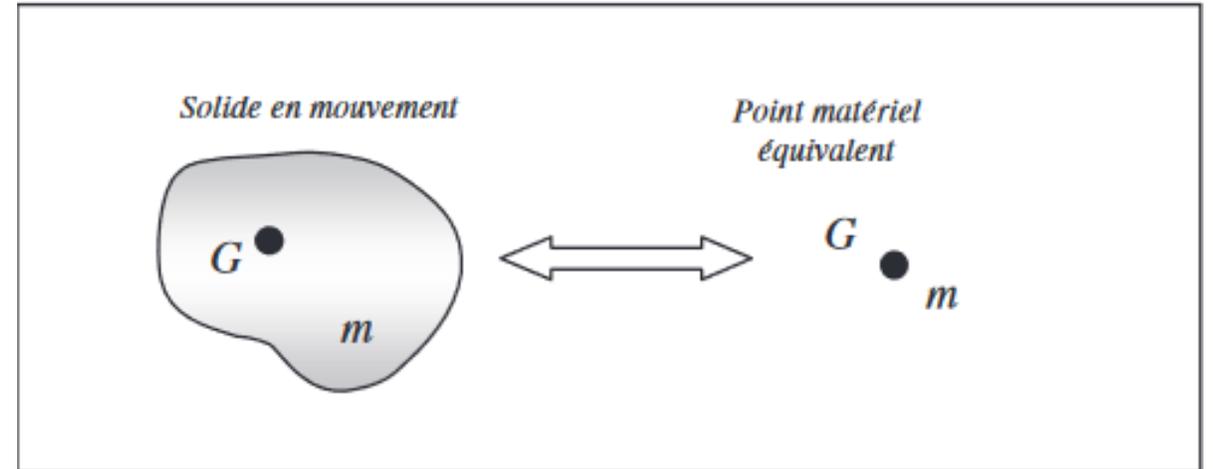
La quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  est donné par la relation :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Ce vecteur est colinéaire au vecteur vitesse et s'exprime en  $kg\ ms^{-1}$ .

Pour un système matériel de  $n$  masse  $m_i$  situées aux points  $P_i$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_i$ , le vecteur quantité de mouvement correspond à la somme des vecteurs quantités de mouvement de chacune des parties constituant le système :

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = m\vec{V}_G$$



Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée sa masse totale.

# Le principe d'inertie ou 1<sup>ère</sup> loi de Newton

Le principe d'inertie repose sur l'hypothèse de l'existence d'un référentiel dit "galiléen" ou **inertiel**. L'archétype de ce type de référentiel est celui de Copernic. Tout autre référentiel appartenant à cette classe doit être en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

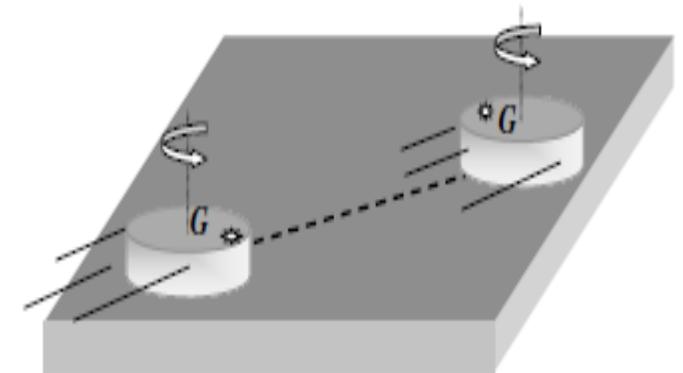
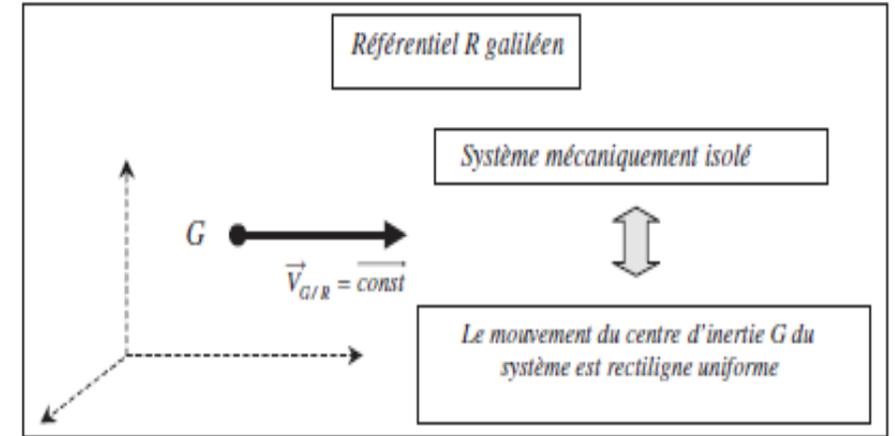
Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne isolé.

Le principe stipule que si le système mécaniquement isolé dans le référentiel galiléen est en mouvement, alors le mouvement de son centre d'inertie est nécessairement rectiligne uniforme. L'application du principe d'inertie conduit à la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{V}_{G/R} = \vec{cst} \Rightarrow \vec{p}_{G/R} = \vec{cst} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{G/R}}{dt} = \vec{0}$$

Insistons sur le fait que le principe d'inertie ne régit que le mouvement du centre d'inertie. Ainsi un hockeyeur qui frappe un palet peut imprimer à celui-ci un mouvement de rotation. Si le palet glisse sur la glace sans frottement, le centre d'inertie décrira une trajectoire rectiligne alors que tous les autres points du palet décriront des trajectoires plus complexes dénommées cycloïdes.

Le principe d'inertie ne prédit que le mouvement de G !



## Exemples de référentiels

L'expérience montre que le référentiel de Copernic est un excellent référentiel galiléen, et ce malgré le mouvement du Soleil dans notre galaxie elle-même en mouvement par rapports aux autres galaxies.

Le référentiel géocentrique est en translation non rectiligne autour du Soleil, il n'est donc pas rigoureusement galiléen. Cependant la révolution sidérale de la Terre s'effectue en 365,25 jours ce qui fait que le référentiel géocentrique peut en première approximation être considéré comme galiléen lorsque le phénomène étudié se produit pendant très court devant la période de révolution de la Terre.

Pour la même raison, le référentiel terrestre n'est pas galiléen, mais s'y apparente lorsque le temps de l'expérience est très inférieur à 24 heures où bien lorsque la précision des mesures ne permet pas de mettre en évidence ce mouvement.



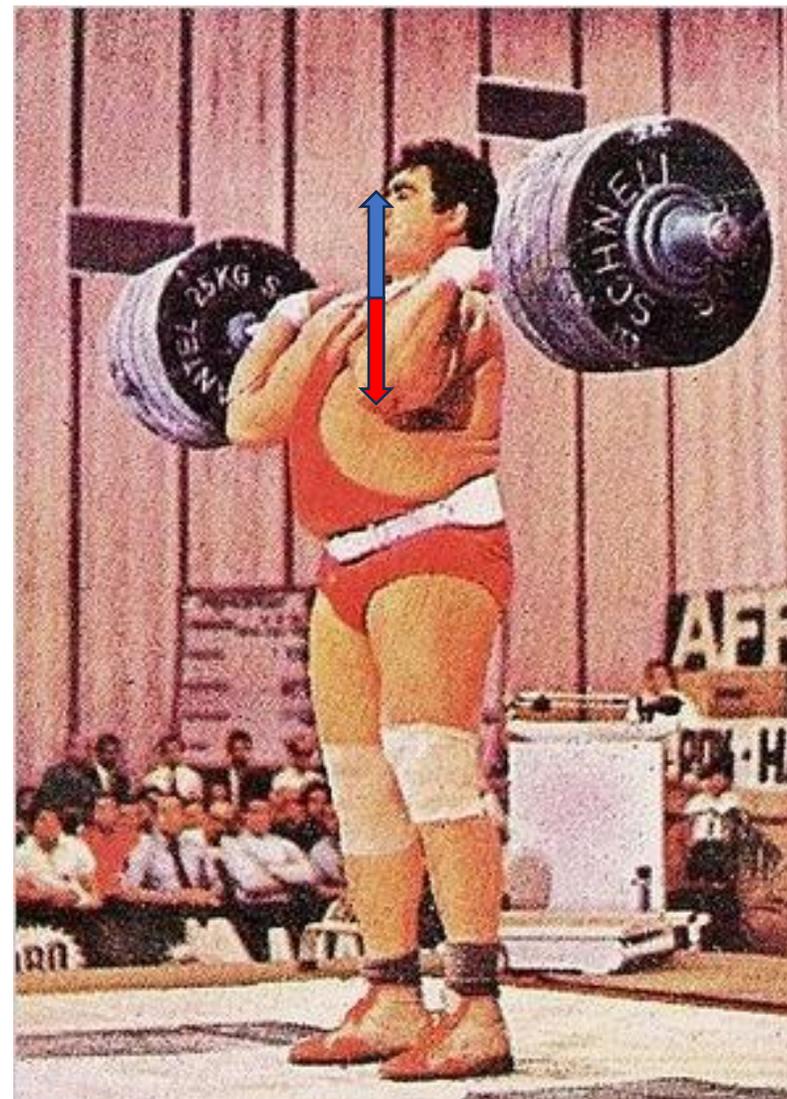
L'expérience du pendule de Foucault met en évidence la rotation de la Terre. Dans ce cas précis, devant la durée de l'expérience, le référentiel terrestre ne peut plus être considéré comme galiléen.

## La notion de force

Un point matériel  $G$  est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions appelées **forces**. Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un **acteur** (celui qui exerce la force) et un **receveur** (celui qui subit la force).

Une force s'exerce dans une certaine direction (ou ligne d'action de la force), dans un certain sens et avec une certaine intensité. Une force a donc toutes les caractéristiques d'un vecteur qui servira à la représenter, par ailleurs une force s'applique en un point particulier.

Une force sera donc matérialisée par un vecteur associé à un point d'application.

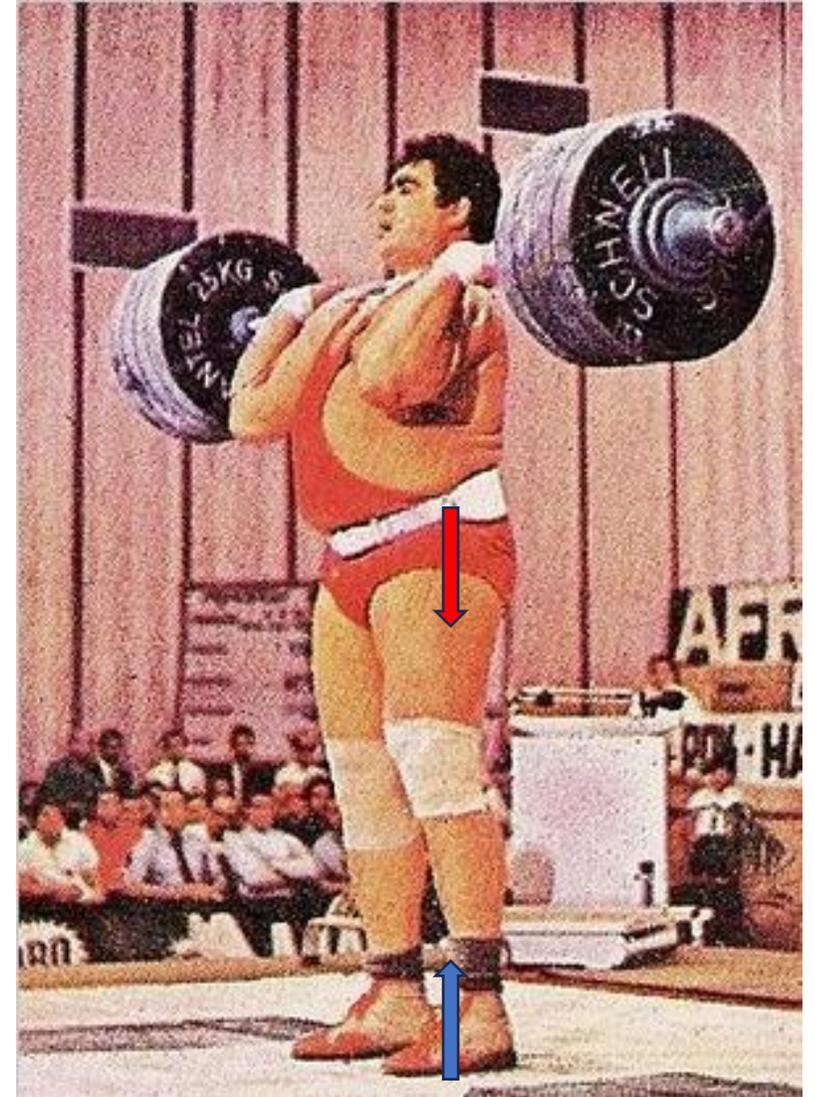


## La notion de force

Un point matériel  $G$  est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions appelées **forces**. Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un **acteur** (celui qui exerce la force) et un **receveur** (celui qui subit la force).

Une force s'exerce dans une certaine direction (ou ligne d'action de la force), dans un certain sens et avec une certaine intensité. Une force a donc toutes les caractéristiques d'un vecteur qui servira à la représenter, par ailleurs une force s'applique en un point particulier.

Une force sera donc matérialisée par un vecteur associé à un point d'application.



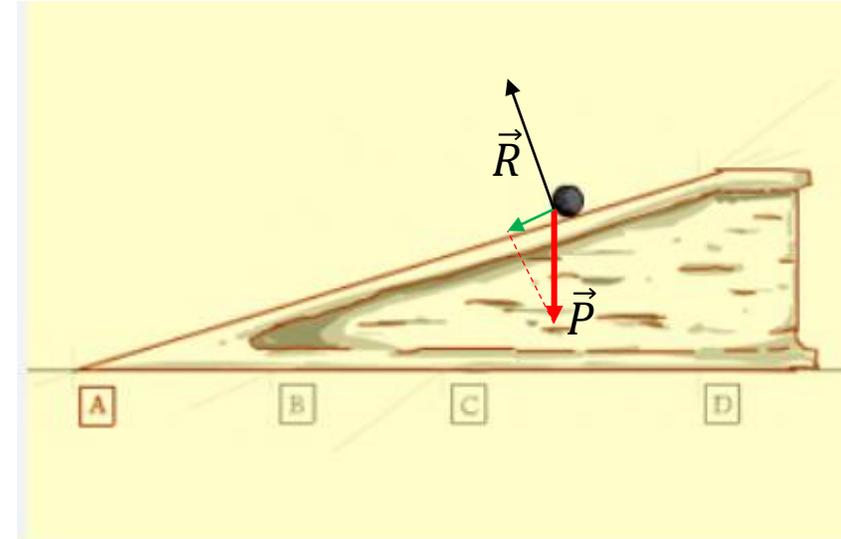
# Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen ou deuxième loi de Newton

Considérons un système matériel  $S$ , de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ , se déplaçant dans un référentiel galiléen. Si ce système n'est pas mécaniquement isolé, c'est-à-dire s'il subit une action non compensée, le principe d'inertie nous indique que sa quantité de mouvement ne peut être constante dans le temps. Le principe fondamental de la dynamique nous permet de lier la cause (actions non compensées) à l'effet observé (quantité de mouvement variable). Il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(m\vec{v}_{G/R})}{dt}$$

Comme la masse du système est supposée constante dans le temps, il en résulte que la relation fondamentale de la dynamique peut s'écrire sous la forme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m * \vec{a}_{G/R}$$



## Quelques applications de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

Imaginons une cabine d'ascenseur avec un passager à bord assimilé à un point matériel P de masse  $m$ . Le système est l'observateur, le référentiel inertiel ( galiléen) est l'immeuble auquel est attaché l'ascenseur, il est décrit par l'axe vertical Ox. Le référentiel accéléré est représenté par l'axe Ay. L'observateur est soumis à trois forces : son poids, la réaction du plancher sur ses pieds et l'accélération d'entraînement de la cabine. La seconde loi généralisée de Newton s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}_a(A) = \vec{0}$$

Lors de la montée pendant la phase d'accélération, nous avons :

$$R = mg + ma_a(A) > mg$$

Lors de la descente, pendant la phase de décélération, nous avons :

$$R = mg - ma_a(A) < mg$$

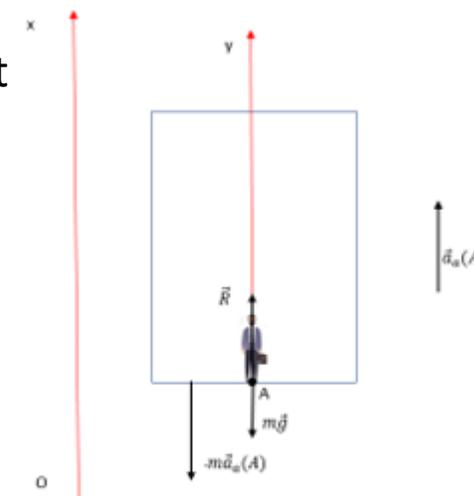
Dans ces deux, la cabine représente un référentiel non galiléen.

En régime stabilisée, le mouvement de la cabine est rectiligne uniforme, c'est à que sa vitesse est constante, dans ce cas :

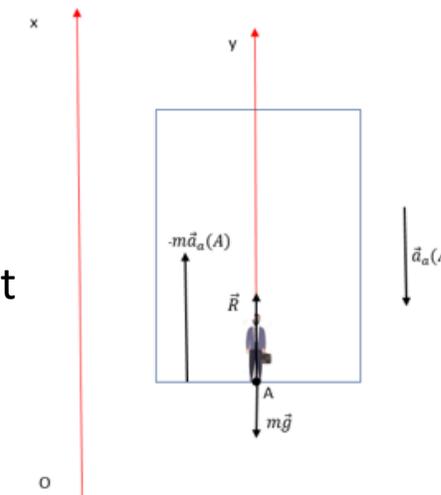
$$R = mg$$

La cabine est représentative d'un référentiel galiléen.

### Montée



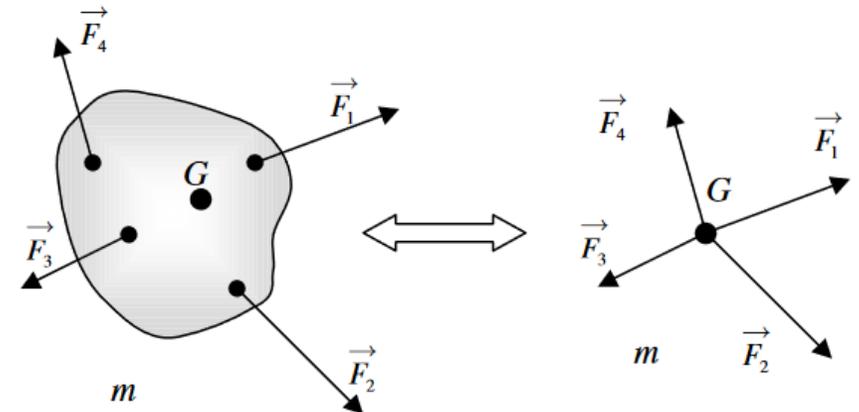
### Descente



## Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel est le même que celui d'un point matériel coïncidant avec ce centre, point qui aurait comme masse la masse totale du système et auquel on appliquerait la somme des forces agissant sur le système. Toutes les forces extérieures appliquées au système seront donc représentées en ce point. La relation fondamentale de la dynamique s'applique uniquement à ce point :

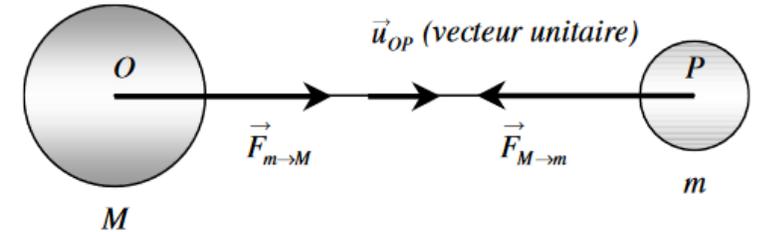
$$\sum \vec{F}_{ext} = m * \vec{a}_{G/R}$$



# Force de gravitation newtonienne

La force de gravitation est la force exercée par une masse  $M$  sur une autre masse  $m$ . Cette force d'interaction a été découverte par Newton en 1655. Celui-ci a montré que deux masses  $m$  et  $M$  interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée s'énonce de la façon suivante : Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance, la force de Newton s'écrit alors :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{m * M}{OP^2} \vec{u}_{op} \text{ comme } \overrightarrow{OP} = OP \vec{u}_{op} \text{ alors } \vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{m * M}{OP^3} \overrightarrow{OP}$$



Cette force attractive est portée par l'axe qui sépare les deux centres d'inertie de masse  $m$  et  $M$ . Il est alors pratique de définir sur cet axe, un vecteur unitaire  $\vec{u}_{op}$  dont le sens est celui de  $O$  (acteur de la force) vers  $P$  (receveur: celui qui subit la force). Dans ces conditions la force exercée de  $M$  sur  $m$  est de même direction mais de sens opposé à celui de ce vecteur directeur. Elle est proportionnelle à  $m$  et  $M$  et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux centres d'inertie  $O$  et  $P$ . Elle fait intervenir une constante dénommée constante de gravitation universelle et a pour valeur  $\mathcal{G} = 6,67 * 10^{-11} \text{ USI}$  (unités du système international).

Il importe de remarquer que si  $M$  attire  $m$  selon la loi précédente, il en est de même pour  $m$  qui attire  $M$  selon la même loi. Nous pouvons donc écrire :

$$\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{m * M}{OP^3} \overrightarrow{PO} = -\vec{F}_{M \rightarrow m}$$

Il s'agit-là du principe des actions réciproques ( troisième loi de Newton)

# Force de gravitation newtonienne. Exemples d'application.

Considérons un Terrien de masse 80kg, il subit de la part des astres proches les forces d'attractions suivantes :

- Pour la Lune

$$\vec{F}_{L \rightarrow \text{Terrien}} = -6,67 * 10^{-11} \frac{80 * 7,35 * 10^{22}}{(3,8 * 10^8)^2} = 2,72 * 10^{-3} \text{N}$$

- Pour le Soleil

$$\vec{F}_{S \rightarrow \text{Terrien}} = -6,67 * 10^{-11} \frac{80 * 1,99 * 10^{30}}{(1,5 * 10^{11})^2} = 0,47 \text{N}$$

On remarque qu'à l'échelle d'un homme les forces d'attraction des astres proches sont faibles. Cependant, l'action du Soleil est bien plus importante que celle de la Lune (environ 170 fois).

Plutôt que des valeurs numériques, il est intéressant d'établir les rapports des forces d'attractions que peut subir un astre. Déterminons le rapport des forces d'attractions exercées sur la Lune par le Soleil d'une part et la Terre d'autre part :

$$\frac{\vec{F}_{S \rightarrow L}}{\vec{F}_{T \rightarrow L}} = \frac{\frac{m_S * m_L}{(d_{SL})^2}}{\frac{m_S * m_L}{(d_{TL})^2}} = \left(\frac{d_{TL}}{d_{SL}}\right)^2 * \frac{m_S * m_L}{m_T * m_L} = \left(\frac{d_{TL}}{d_{SL}}\right)^2 * \frac{m_S}{m_T} = \left(\frac{1}{395}\right)^2 * \frac{1}{3} * 10^6 \approx 2$$

La force d'attraction du Soleil sur la Lune est deux fois supérieure à celle de la Terre. Comment dans ce cas la Lune peut-elle rester en orbite autour de la Terre et ne pas "tomber" sur le Soleil ? Nous répondrons à cette question un peu plus loin.

# Champ de gravitation

Une masse  $m$  au voisinage d'une masse  $M$  subit donc une force. Celle-ci est liée à la présence d'un champ de gravitation créé par la masse  $M$  au point où est située la masse  $m$ .

En effet, on peut exprimer cette force sous la forme suivante :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \left( -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \overrightarrow{OP} \right) = m \vec{G}(P)$$

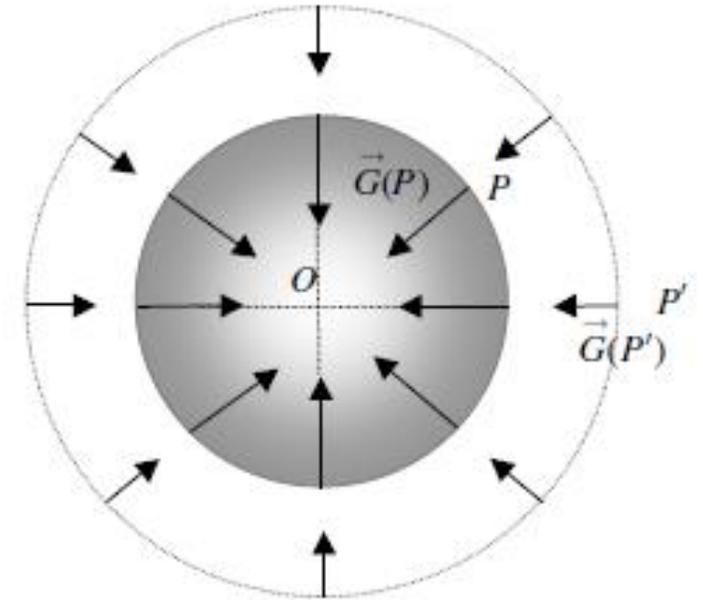
La masse  $M$  étant fixée, le vecteur  $\vec{G}(P)$  ne dépend que de la position du centre d'inertie  $P$  de la masse  $m$  par rapport au centre d'inertie  $O$  de  $M$ . On définit ainsi un champ de vecteurs qui correspond au champ de gravitation de la masse  $M$ . En tout point  $P$  de l'espace ce champ a pour expression :

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \overrightarrow{OP} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^2} \vec{u}_{op}$$

Une masse  $m$  placée en un point  $P$  de l'espace subit alors la force :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \vec{G}(P)$$

Dans le cas où la densité volumique du corps  $M$  est à symétrie sphérique (ce qui est le cas pour bon nombre d'étoiles), le champ de gravitation l'est aussi et est donc radial et centripète. La force  $\vec{F}_{M \rightarrow m}$  est alors une **force centrale**.



## Champ de gravitation à la surface de la Terre

Lorsque la masse  $M$  est la masse de la Terre et que  $P$  de masse  $m$  est à la surface de la Terre, la distance  $OP$  correspond au rayon de terrestre  $R_T$ , et la force de Newton représente l'attraction de la Terre sur la masse  $m$ . Elle peut alors s'écrire :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\mathcal{G} \frac{m \cdot M}{(R_T)^2} \vec{u}_{op} = m \vec{G}_0(P)$$

où  $\vec{G}_0(P)$  représente le champ de gravitation de la Terre au point  $P$  considéré, soit :

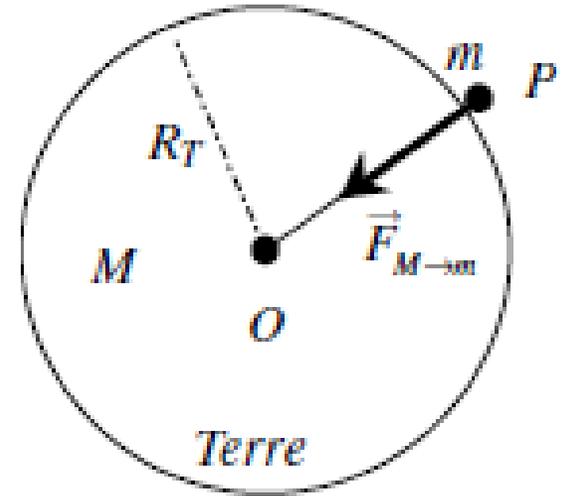
$$\vec{G}_0(P) = -\mathcal{G} \frac{M}{(R_T)^2} \vec{u}_{op} = -\mathcal{G} \frac{M}{OP^3} \overrightarrow{OP}$$

Ce champ est un champ centripète et radial. Il est en première approximation à symétrie sphérique ce qui signifie que le module  $G_0$  est constant à la surface de la Terre.

Avec  $\mathcal{G} = 6,64 \cdot 10^{-11}$  USI ;  $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  et  $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ , on obtient la valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre.

$$G_0 = \mathcal{G} \cdot \frac{M}{R_T^2} = 9,83 \text{ ms}^{-2}$$

Cette valeur est proche de celle du champ de pesanteur  $g$  à la surface de la Terre. La différence provient principalement au mouvement de rotation de la Terre autour de son axe Nord-Sud. Cependant il est possible, en première approximation, de considérer que le champ de gravitation  $G_0$  correspond au champ de pesanteur  $g$ .



## Champ de gravitation au voisinage de la surface terrestre.

Nous allons maintenant considérer le cas où la masse au point P n'est plus en contact avec la surface terrestre mais se trouve à l'altitude  $h$  de la Terre avec comme condition  $h \ll R_T$ . La relation ci-dessous exprime la variation relative de  $G$  en fonction de  $h$ . On constate que  $G$  décroît avec l'altitude.

$$\frac{\Delta G}{G(0)} \approx -\frac{2 * h}{R_T \left(1 + 3 \frac{h}{R_T}\right)}$$

Par exemple pour  $h = 8000$  m, on a :

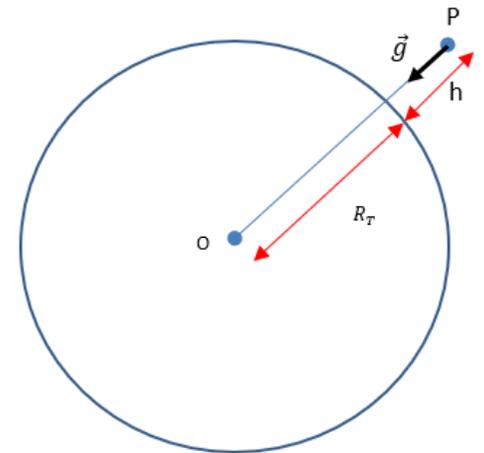
$$\frac{\Delta G}{G(0)} \approx -\frac{2 * 8}{6370 * \left(1 + 3 \frac{8}{6370}\right)} = -2,5 * 10^{-3}$$

L'accélération du champ de gravitation diminue de 0,25 % à 8000 m d'altitude.

Pour  $h = 400$  km, altitude moyenne de la station spatiale internationale

$$\frac{\Delta G}{G(0)} \approx -\frac{2 * 400}{6370 * \left(1 + 3 \frac{400}{6370}\right)} \approx -11 \%$$

L'accélération du champ de gravitation diminue d'environ 11% seulement à 400 km d'altitude.



## Une loi extraordinaire

Les effets de marées sont fréquemment cités. On les invoque par exemple pour interpréter la structure particulière des anneaux planétaires. On doit faire intervenir un effet de même type pour calculer la distance Terre-Lune maximale telle que les deux astres restent au voisinage l'un de l'autre. Dans tous les cas, il s'agit d'un effet différentiel. On se propose ici de faire comprendre de façon élémentaire et avec un strict minimum de formalisme ces effets différentiels et de décrire quelques conséquences. Reprenons la formule de la force générée par un champ de gravitation :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = m \left( -G \frac{M}{OP^3} \overrightarrow{OP} \right) = m \vec{G}(P)$$

et supposons que le point matériel P soit soumis aux seules forces gravitationnelles, son accélération  $\vec{a}(P)$  relativement à un référentiel inertiel ( galiléen) est :

$$\vec{a}(P) = \vec{G}(P)$$

où  $\vec{G}(P)$  est le champ gravitationnel en P. L'accélération est  $\vec{a}(P)$  est donc **indépendante du corps**. La fameuse loi de chute des corps "tous les corps tombent également vite" n'est qu'une illustration de la loi ci-dessus. Il s'agit d'une loi très extraordinaire qui est propre en fait aux seules interactions gravitationnelles. L'accélération  $\vec{a}(P)$  mesure ainsi le champ gravitationnel en P. Il convient ici de raisonner non pas en terme de force mais en terme d'accélération ou de champ gravitationnel, ce qui revient au même dans le cas d'un référentiel inertiel (galiléen).

Les effets de marées font intervenir des effets gravitationnels différentiels, c'est-à-dire la différence des champs gravitationnels en deux points  $P_1$  et  $P_2$  soit  $\vec{G}(P_2) - \vec{G}(P_1)$ . Dans un référentiel inertiel (galiléen), cette différence est aussi égale à la différence des accélérations pour un corps soumis aux seules actions gravitationnelles.

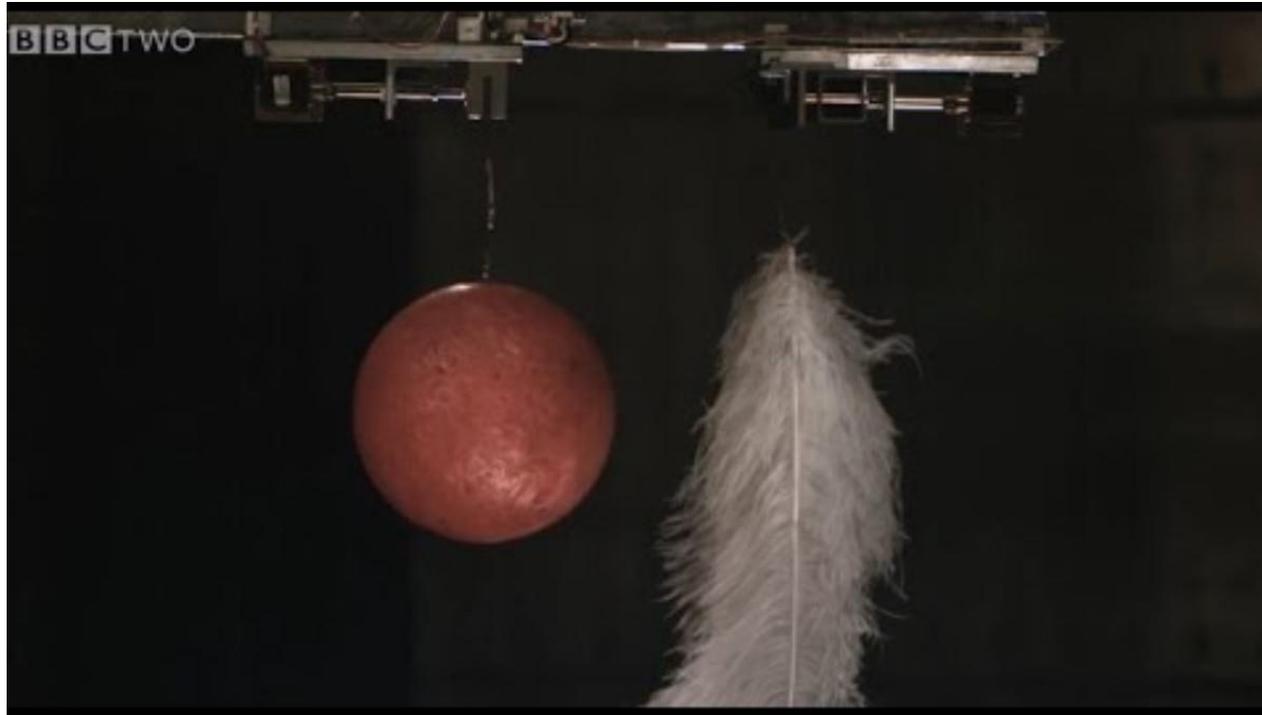
$$\vec{G}(P_2) - \vec{G}(P_1) = \vec{a}(P_2) - \vec{a}(P_1)$$

Une loi extraordinaire \_ une expérience célèbre.



Voici un extrait de la vidéo de l'astronaute américain David Scott qui refait l'expérience de Galilée en 1971 sur la Lune (Apollo 15 en 1971). On peut observer l'effet de la masse sur la chute libre d'un corps. À gauche, il a un marteau et à droite, une plume de faucon. Lâchés sans vitesse initiale, les deux objets touchent le sol au même instant.

## Une loi extraordinaire \_ seconde expérience



La boule de bowling tombe-t-elle plus vite que la plume ?

## Impesanteur

Imaginons que l'on coupe le câble de maintien de la cabine. Que se passe-t-il ? La seule force à laquelle sont soumis l'observateur et la cabine est leur poids respectif. Nous avons toujours la relation vectorielle de la planche 13 :

$$m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}_a(A) = \vec{0}$$

Mais ici :

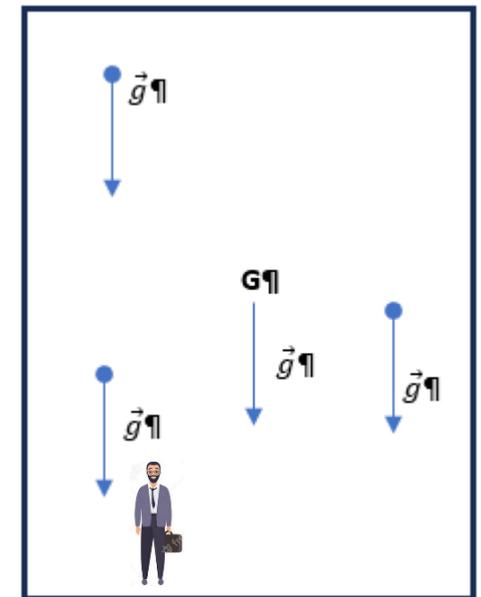
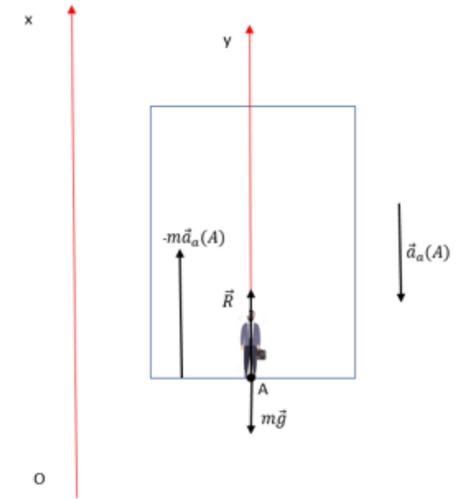
$$\vec{a}_a(A) = \vec{g}$$

donc :

$$m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{g} = \vec{0} = \vec{R}$$

Cabine et observateur sont en chute libre. Cette situation se nomme **impesanteur**. Il ne saurait y avoir de propriété analogue à l'impesanteur avec les interactions autres que gravitationnelles, pour toutes les autres, électriques par exemple, l'accélération locale en P dépend du corps.

Plaçons maintenant des billes dans la cabine de l'ascenseur en chute libre. L'accélération de chute de la cabine est  $\vec{g}$ , les billes placées dans la cabine subissent la même accélération  $\vec{g}$  supposée uniforme (on néglige la résistance de l'air). Si, par exemple, les vitesses initiales des de la cabine et des billes sont nulles, les billes restent immobiles par rapport à la cabine. Un observateur lié à la cabine interprète ce comportement en terme d'impesanteur.



## Effets différentiels

Supposons maintenant le champ  $\vec{g}$  légèrement non uniforme. La cabine en chute libre a une accélération qui est égale à  $\vec{g}(G)$  au centre d'inertie  $G$  de la cabine. Une bille 1 en  $P_1$  a l'accélération de chute  $\vec{g}(P_1)$  et de même une bille 2 en  $P_2$  a l'accélération de chute  $\vec{g}(P_2)$  avec :

$$|\vec{g}(P_2)| > |\vec{g}(G)| > |\vec{g}(P_1)|$$

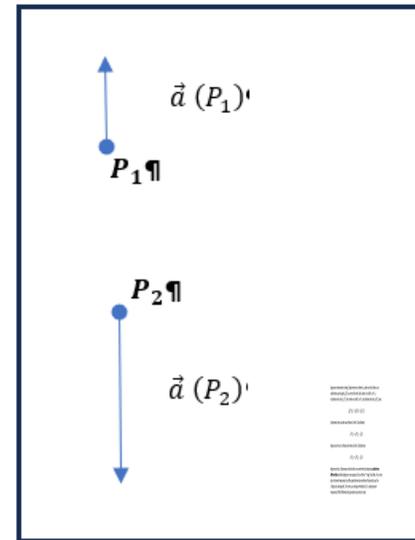
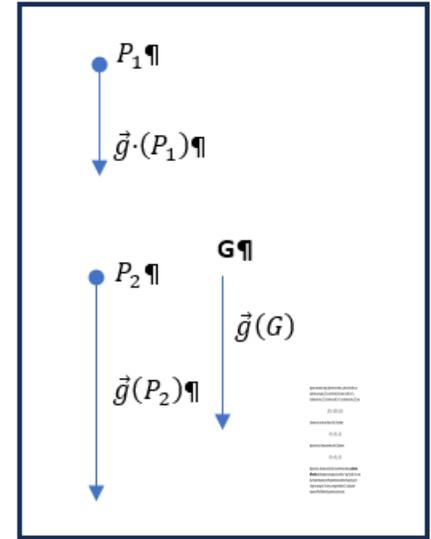
L'observateur dans la cabine va attribuer à la bille 1 l'accélération :

$$\vec{a}(P_1) = \vec{g}(P_1) - \vec{g}(G)$$

dirigée vers le haut. Il attribuera de même à la bille 2 l'accélération :

$$\vec{a}(P_2) = \vec{g}(P_2) - \vec{g}(G)$$

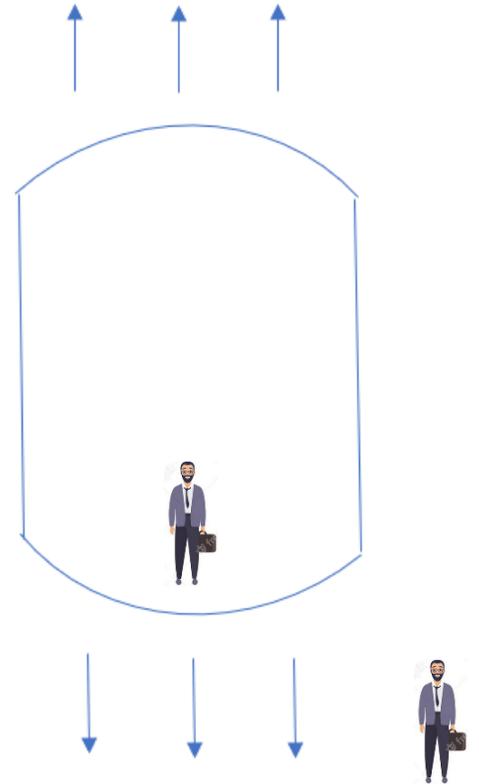
dirigée vers le bas. Il observera ainsi du fait de la non-uniformité du champ des **accélérations différentielles** des billes dirigées en sens opposés, d'où un effet de "trriage" des billes. Il n'y a donc plus strictement impesanteur, les effets gravitationnels se manifestent d'autant plus que l'on s'éloigne du voisinage de  $G$ . Par contre, au voisinage immédiat de  $G$ , il y a pratiquement impesanteur (l'effet différentiel de la gravitation est proche de zéro).



## Effets de marées

Imaginons à présent que le plafond et le sol de la cabine soient constituées d'une matière très souple. L'effet différentiel se manifestera comme l'indique la figure ci-contre et ceci indépendamment de la position de l'observateur. C'est la simple transposition du cas des billes.

Cet effet différentiel dislocateur n'est autre qu'un " effet de marées "

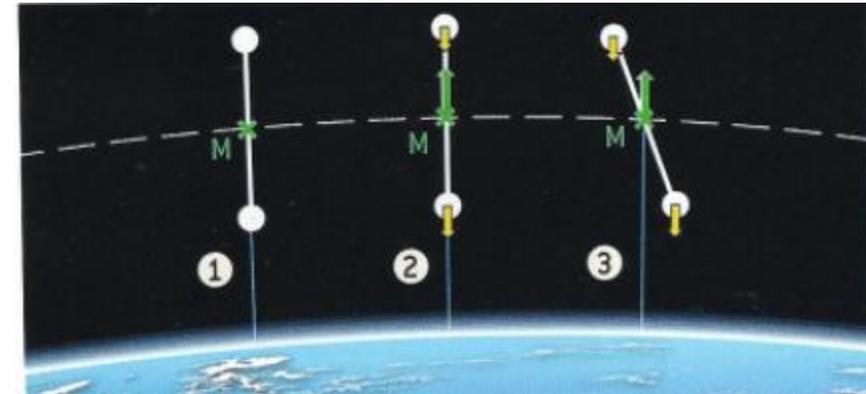


## Effets de marées\_ stabilisation d'un satellite par gradient gravitationnel

Si peu important la position prise dans l'espace du premier satellite artificiel, il n'en va pas de même pour les engins de haute précision dont l'instrumentation doit viser avec précision une région terrestre ( caméra, antennes). Le gradient de gravité est une méthode pour stabiliser la position d'un satellite.

Considérons un satellite en rotation autour de la Terre et dont la centre d'inertie  $M$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$ . Il est constitué de deux masses reliées par une tige. La partie basse est plus proche de la Terre donc elle est davantage attirée que par la partie haute (flèches jaunes). Si le satellite s'écarte de la position d'équilibre, le gradient gravitationnel crée un couple de forces qui tend à l'y ramener ( cas 3).

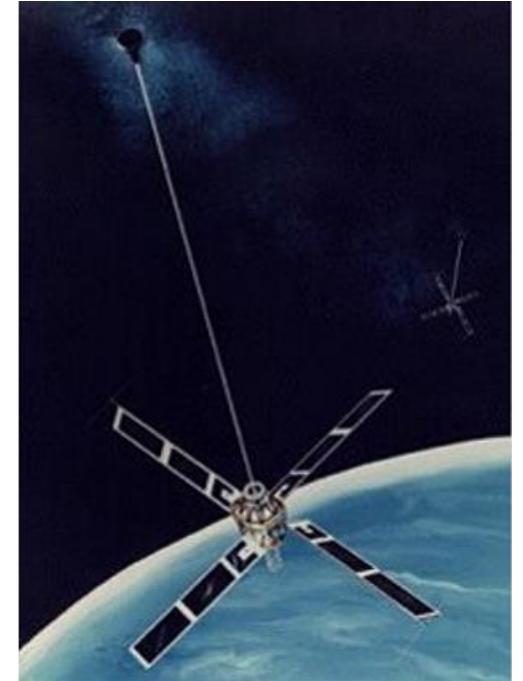
On pourra se reporter à la planche 36 pour plus de détails.



## stabilisation d'un satellite par gradient gravitationnel \_ exemple

Transit est le premier système de positionnement par satellites au monde mis au point pour la marine de guerre américaine. Il a été développé dans le contexte de la guerre froide et deviendra opérationnel en 1964.

D'une masse d'une cinquantaine de kilogrammes, circulant sur une orbite polaire, il est stabilisé par gradient de gravité. Sur la vue d'artiste ci-contre, on distingue la longue perche terminée par une masse qui permet d'assurer la bonne orientation du satellite sur son orbite.



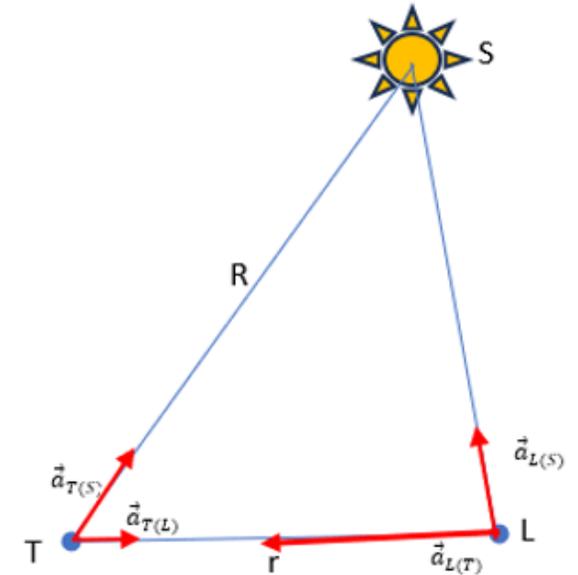
## Effets de marées \_ le trio Soleil – Terre – Lune

Nous avons vu à la planche 18 que la force d'attraction du Soleil sur la Lune est deux fois supérieure à celle qu'exerce la Terre sur notre satellite. Comment dans ce cas la Lune peut-elle rester en orbite autour de la Terre et ne pas "tomber" sur le Soleil ?

Le problème est en fait mal abordé. Ce qu'il convient de calculer c'est l'accélération différentielle de la Terre et de la Lune, soit :  $\vec{a}_L - \vec{a}_T$  dans le champ solaire et dans leur champ respectif, c'est-à-dire :

$$\vec{a}_L - \vec{a}_T = (\vec{a}_{L(S)} + \vec{a}_{L(T)}) - (\vec{a}_{T(S)} + \vec{a}_{T(L)}) = (\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)}) + (\vec{a}_{L(T)} - \vec{a}_{T(L)})$$

Le premier terme du second membre est un terme de type marée, c'est-à-dire un terme dislocateur, le second terme est un terme attractif. La condition de satellisation de la Lune autour de la Terre impose que le scalaire du second terme soit supérieur à celui du premier. Cette condition n'est plus réalisée lorsque la distance Terre-Lune est supérieure à 1,7 million de km. On pourra se reporter aux planches 37 à 39 pour davantage d'informations



## La limite de Roche (Edouard Roche 1820-1883)

En 1849, Edouard Roche calcule qu'un satellite déformable s'approchant d'un astre de rayon  $R$  perd sa cohésion en deçà d'une limite donnée par :

$$d_{lim} = 2,45 \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$\rho_M$  et  $\rho_m$  étant les masses volumiques respectives des deux objets. Le calcul précis de cet effet est très complexe, on trouvera une méthode approchée aux planches 40 et 41.

Les anneaux des planètes géantes sont tous contenus à l'intérieur de la limite de Roche. On montre ainsi qu'un "glaçon" contenu dans les anneaux de Saturne ne pourrait dépasser quelques kilomètres.

L'intense intensité volcanique de Io ( satellite proche de Jupiter ) serait probablement due aux interactions de marées avec Europe, Ganymède et Jupiter. Bien qu'lo présente toujours la même face à Jupiter, les interactions avec Europe et Ganymède déforme la surface de Io qui se soulève et s'abaisse avec une amplitude de 100 m environ, en produisant de la chaleur par frottement interne. Il s'agirait d'une explication plausible à l'intense intensité volcanique de Io



Io (Nasa)

## La limite de Roche (Edouard Roche 1820-1883)

La comète Shoemaker-Levy 9 découverte en 1993 était composée d'une vingtaine de fragments. L'analyse de son orbite révéla qu'en 1992, cette comète s'était approchée de la surface de Jupiter (à seulement 40 000 km), en l'occurrence en deçà de la limite de Roche de la comète. Elle se disloqua probablement à ce moment-là. Les fragments tombèrent sur Jupiter en 1994 donnant lieu à un chapelet d'impacts dans l'atmosphère jovienne.



Nasa \_ Hubble

## Objet interstellaire

En octobre 2017, un objet est détecté . Est-ce une comète ou un astéroïde ? Il porte le nom officiel de " Oumuamua " , nom d'origine hawaïenne parce qu'il a été observé par un système de télescope situé au sommet d'un ancien volcan de l'île de Maui (Hawaï). Sa trajectoire et sa vitesse impliquent que l'objet vient au-delà du système solaire. Sa trajectoire est de nature hyperbolique, sa vitesse approximativement de 90 km/s au moment de son observation. Il fait penser à un cigare. Sa longueur fait 10 fois son diamètre soit environ 800m\*80m, il tourne sur lui-même en quelques heures. Selon les spécialistes, ce corps ressemble à un astéroïde déformé par effet de marée.



Nasa

## Pourquoi Phobos n'explose-t-il pas ?

On peut montrer que Phobos gravite autour de Mars à une distance inférieure à la limite de Roche. De fait Phobos subit des effets de marées extrêmement forts. Il est très allongé :  $27 \times 21,6 \times 18,8$  km mais il est bien solide et n'explose pas. La limite de Roche est-elle une notion erronée ?

En fait, le modèle de Roche est incomplet. La limite de Roche est la limite à laquelle un corps se disperserait par effet de marée si la cohésion de celui-ci n'était assurée que par la gravitation.

Le modèle de Roche ne prend pas en compte par exemple les forces de cohésion électromagnétique de la matière.



Nasa\_Phobos

## Annexe \_stabilisation d'un satellite par gradient gravitationnel

Soit  $M$  le centre de masse du satellite,  $R$  le rayon de l'orbite supposée circulaire du satellite,  $M_T$  la masse de la Terre, alors le champ de gravitation terrestre en  $M$  a pour intensité :

$$G_R = \mathcal{G}_j * \frac{M_T}{R^2}$$

Passons de  $M$  à une extrémité du satellite distante de  $r$  du point  $M$  ( $r \ll R$ ), le champ gravitationnel terrestre pour cette extrémité a pour intensité :

$$G_{R+r} = \mathcal{G}_j * \frac{M_T}{(R+r)^2}$$

Développons et mettons  $R$  en facteur :

$$G_{R+r} = \mathcal{G}_j * \frac{M_T}{(R+r)^2} = \mathcal{G}_j * \frac{M_T}{R^2 + 2Rr + r^2} = \mathcal{G}_j * \frac{M_T}{\left[R * \left(1 + \frac{r}{R}\right)\right]^2} = \frac{\mathcal{G}_j * M_T}{R^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} = \frac{\mathcal{G}_j * M_T}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2}$$

Un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre nous donne :

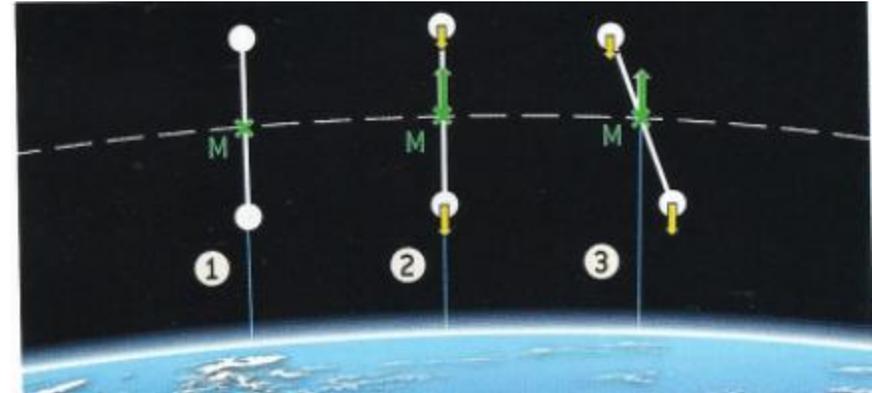
$$G_{R+r} = \frac{\mathcal{G}_j * M_T}{R^2} \left(1 - 2 \frac{r}{R}\right) = \frac{\mathcal{G}_j M_T}{R^2} - 2 \frac{\mathcal{G}_j M_T r}{R^3}$$

Posons  $g = \frac{\mathcal{G}_j M_T}{R^2}$ , alors :

$$G_R - G_{R+r} = \Delta a = \frac{\mathcal{G}_j M_T}{R^2} - \left(\frac{\mathcal{G}_j M_T}{R^2} - 2 \frac{\mathcal{G}_j M_T r}{R^3}\right) = 2 \frac{\mathcal{G}_j M_T r}{R^3} = 2g \frac{r}{R}$$

Si l'on considère les deux extrémités, le gradient différentiel devient :

$$(G_{R-r} - G_{R+r}) = 4g \frac{r}{R}$$



## Annexe \_ effets de marées \_ le trio Soleil – Terre – Lune (1).

On se propose ici d'évaluer la distance Terre-Lune maximale telle que notre satellite reste effectivement satellisé par la Terre. Nous assimilerons les trois astres à des points matériels. Nous avons vu à la planche 18 que la force d'attraction du Soleil sur la Lune est deux fois supérieure à celle qu'exerce la Terre sur notre satellite. Comment dans ce cas la Lune peut-elle rester en orbite autour de la Terre et ne pas "tomber" sur le Soleil ?

Considérons la différence vectorielle  $\vec{a}_L - \vec{a}_T$  dans le champ solaire et dans leur champ réciproque. La figure ci-contre décrit la situation.

- $\vec{a}_{T(S)}$  est l'accélération de la Terre dans le champ solaire.
- $\vec{a}_{L(S)}$  est l'accélération de la Lune dans le champ solaire.

Ces deux accélérations ont des valeurs scalaires voisines car la distance  $R = ST \approx SL$  ( $1,5 * 10^8 \text{ km}$ ) est grande devant  $r = TL$  ( $3,8 * 10^5 \text{ km}$ ). Nous vérifierons que l'hypothèse  $r \ll R$  reste vraie même dans le cas limite où la Lune échapperait à la satellisation terrestre. La différence vectorielle  $\vec{a}_{T(S)} - \vec{a}_{L(S)}$  mesure la différence des champs créés par le Soleil respectivement en T et en L.

- $\vec{a}_{T(L)}$  est l'accélération de la Terre dans le champ lunaire.
- $\vec{a}_{L(T)}$  est l'accélération de la Lune dans le champ terrestre.

Concernant les ordres de grandeur nous avons :

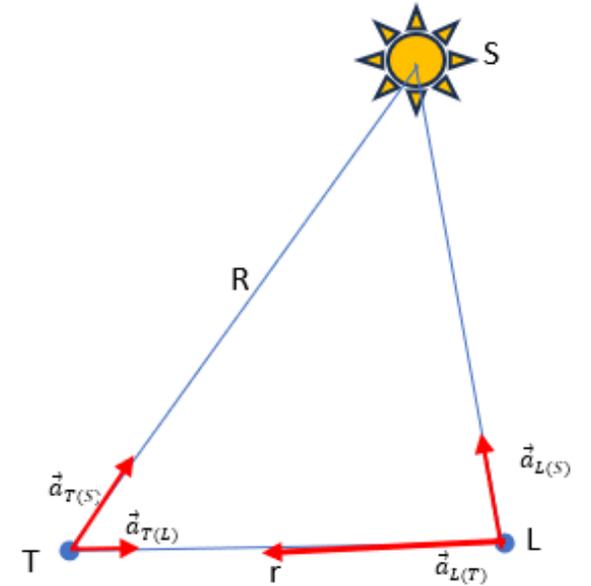
$$\frac{|\vec{a}_{L(S)}|}{|\vec{a}_{L(T)}|} = \frac{\frac{G M_S}{R^2}}{\frac{G M_T}{r^2}} = \frac{M_S}{R^2} * \frac{r^2}{M_T} = \frac{M_S}{M_T} * \frac{r^2}{R^2} \quad \text{avec :}$$

- $M_S = 2 * 10^{30} \text{ kg}$
- $M_T = 6 * 10^{24} \text{ kg}$
- $M_L = 7,34 * 10^{22} \text{ kg}$

L'application numérique nous indique que :

$$|\vec{a}_{L(S)}| \approx 2 * |\vec{a}_{L(T)}|$$

L'accélération de la Lune dans le champ solaire est deux fois plus grande que celle due au champ terrestre. Ceci est conforme à ce que nous avons trouvé planche 18.



## Annexe \_ effets de marées \_ le trio Soleil – Terre – Lune (2).

D'autre part :

$$\frac{|\vec{a}_{L(T)}|}{|\vec{a}_{T(L)}|} = \frac{\frac{G_s M_T}{r^2}}{\frac{G_s M_L}{r^2}} = \frac{M_T}{M_L}$$

L'application numérique nous donne :

$$|\vec{a}_{L(T)}| \approx 80 * |\vec{a}_{T(L)}|$$

Ainsi les sommes vectorielles des accélérations subies par la Terre et la Lune s'écrivent respectivement :

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{T(S)} + \vec{a}_{T(L)}$$

$$\vec{a}_L = \vec{a}_{L(S)} + \vec{a}_{L(T)}$$

D'où l'accélération différentielle de la Terre et de la Lune :

$$\vec{a}_L - \vec{a}_T = (\vec{a}_{L(S)} + \vec{a}_{L(T)}) - (\vec{a}_{T(S)} + \vec{a}_{T(L)}) = (\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)}) + (\vec{a}_{L(T)} - \vec{a}_{T(L)})$$

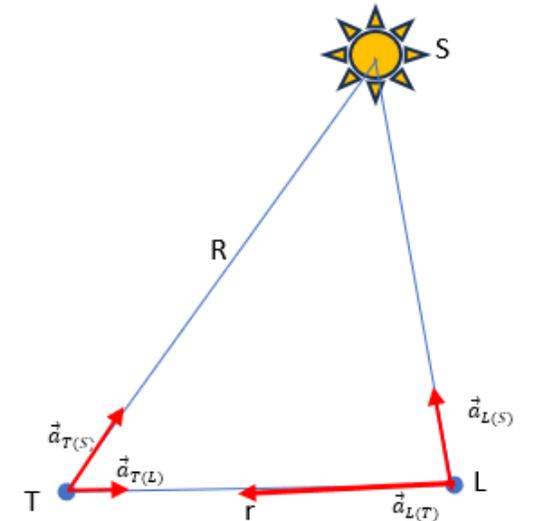
Le premier terme du second membre de l'expression ci-dessus représente l'accélération différentielle des deux astres dans le champ solaire . C'est ce terme qui mesure la capacité des deux astres à se séparer du fait du champ solaire, il s'agit d'un **terme de type marée**. Le second terme qui est en fait une somme de deux vecteurs de mêmes direction et sens traduit simplement l'interaction attractive réciproque des deux astres. Ce terme rend évidemment compte du désir de voisinage de la Terre et de la Lune. Il faut donc comparer l'importance relative de terme de marée ( dislocateur) et du terme d'attraction.

Le terme dislocateur  $\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)}$  est maximal en module lorsque les trois astres sont alignés. Dans ce cas, et avec l'approximation  $R \gg r$  . Nous avons d'une part :

$$|\vec{a}_{L(S)}| = G_s \frac{M_S}{(R+r)^2} = G_s \frac{M_S}{(R^2 + 2rR + r^2)} = G_s \frac{M_S}{R^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} = G_s \frac{M_S}{R^2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-2} \approx G_s \frac{M_S}{R^2} \left(1 + 2\frac{r}{R}\right)$$

En conséquence :

$$\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)} \approx \left\{ \left[ G_s \frac{M_S}{R^2} \left(1 + 2\frac{r}{R}\right) \right]^2 - \left[ G_s \frac{M_S}{R^2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 2G_s \frac{rM_S}{R^3}$$



## Annexe \_ effets de marées \_ le trio Soleil – Terre – Lune (3).

D'autre part, le terme attractif  $\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)}$  est pratiquement égal à :

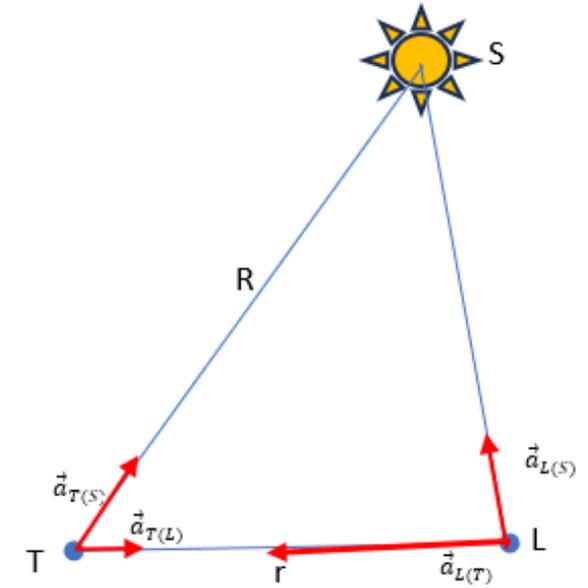
$$|\vec{a}_{L(S)} - \vec{a}_{T(S)}| \approx \mathcal{C}_3 \frac{M_T}{r^2}$$

La condition de voisinage est :

$$\mathcal{C}_3 \frac{M_T}{r^2} > 2\mathcal{C}_3 \frac{rM_S}{R^3}$$

Après avoir isolé  $r$  dans le premier membre, on obtient :

$$r < R \sqrt[3]{\frac{M_T}{2M_S}} \approx 1,7 * 10^6 \text{ km}$$



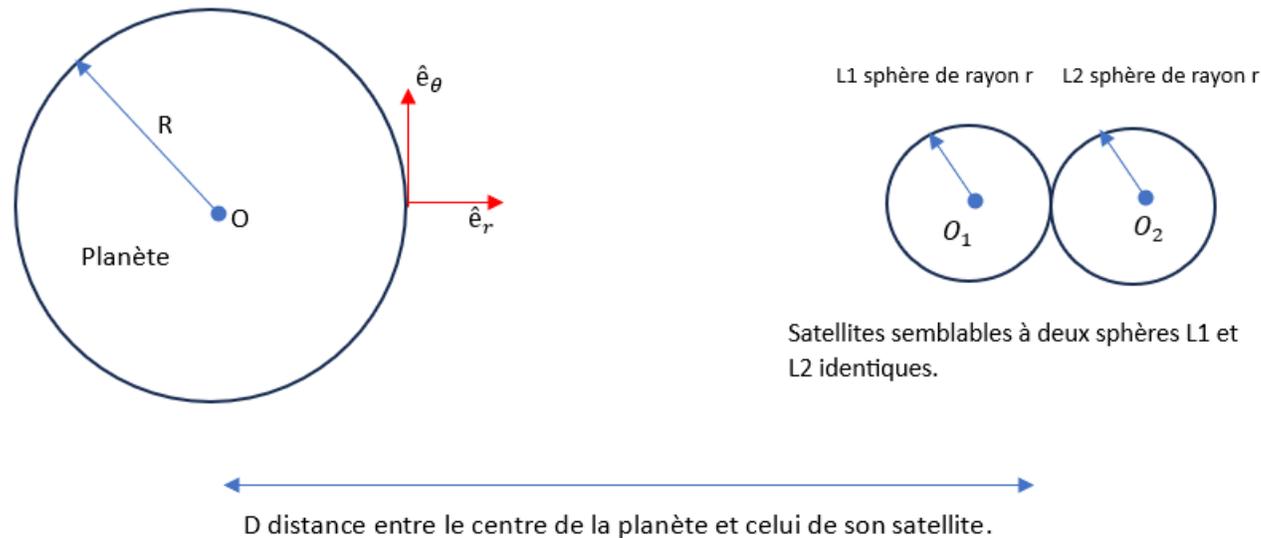
## Annexe \_ méthode revisitée de la limite de Roche (1)

Cette limite marque la distance minimale théorique d'existence de deux gros satellites. En deçà, le satellite pourrait se fragmenter en anneaux. La valeur limite acceptée aujourd'hui est  $d_{lim} = 2,45 \left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}$  avec  $\rho_M$  la masse volumique de la planète,  $\rho_m$  la masse volumique du satellite considéré et R le rayon de la planète. Pour réussir à obtenir ce résultat, il faut faire des calculs assez complexes, or on peut trouver un résultat du même ordre de grandeur avec des calculs plutôt simples. C'est ce que l'on se propose de faire ici.

Nous allons approximer le satellite considéré à deux sphères semblables de rayon  $\frac{1}{4}$  et de masse  $\frac{1}{2}$  de la masse totale du satellite qui ne sont maintenues entre-elles que par la gravitation. La planète exerce donc une force gravitationnelle sur  $L_1$  et une sur  $L_2$ , on obtient en termes de grandeurs scalaires :

- $F_1 = F_{planète \rightarrow L_1} = G \frac{Mm}{(D-r)^2}$
- $F_2 = F_{planète \rightarrow L_2} = G \frac{Mm}{(D+r)^2}$

Avec M la masse de la planète, m la masse de la sphère  $L_1$  et  $L_2$  soit  $\frac{1}{2}$  de la masse du satellite en entier. Les deux sphères  $L_1$  et  $L_2$  seront donc soumises à une force résultante qui tend à les séparer.



## Annexe \_ méthode revisitée de la limite de Roche (2)

Nous avons donc :

$$F_1 - F_2 = G \frac{Mm}{(D-r)^2} - G \frac{Mm}{(D+r)^2} = G M m \left[ \frac{1}{(D-r)^2} - \frac{1}{(D+r)^2} \right] = G M m \left[ \frac{1}{D^2 \left(1 - \frac{r}{D}\right)^2} - \frac{1}{D^2 \left(1 + \frac{r}{D}\right)^2} \right] = \frac{G M m}{D^2} \left[ \left(1 - \frac{r}{D}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{r}{D}\right)^{-2} \right]$$

$$F_1 - F_2 = \frac{G M m}{D^2} \left(1 + 2 \frac{r}{D}\right) - \left(1 - 2 \frac{r}{D}\right) = \frac{4 G M m r}{D^3}$$

Par ailleurs, il existe une force de cohésion entre les deux sphères que nous pouvons exprimer de la façon suivante :

$$F_c = \frac{G m m}{(2r)^2} = \frac{G m^2}{4r^2}$$

Il y a séparation des deux masses si :

$$F_1 - F_2 > F_c \Rightarrow \frac{4 G M m r}{D^3} > \frac{G m^2}{4r^2}$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$D < \left( \frac{16 M r^3}{m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

Remplaçons M et m par les masses volumiques de la planète et des deux sphères. On a :  $\rho_M = \frac{4}{3} \pi R^3$  et  $\rho_m = \frac{4}{3} \pi r^3$

En substituant les masses volumiques dans (1), on obtient finalement ;

$$D < 16^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} R \approx 2,52 \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} R$$

Soit une très bonne approximation de la véritable limite calculée par Roche.