La formule de Tsiolkovsky.

Thierry Piou président de l'association d'astronomie ''Pêcheurs d'étoiles'' La Baule

Introduction

Nous sommes le 3 octobre 1942 à Peenemünde, Walter Dornberger parle[1] :
'' Le spécialiste de la propulsion venait d'abaisser le troisième levier, le plus critique. Le stade n°3 était commencé. Tournant à quatre mille tours-minute, développant une puissance de 540 CV, une turbopompe était entrée en action et chassait à raison de 125 litres par seconde, l'alcool et l'oxygène vers la chambre de combustion.
Environ une seconde plus tard, la poussée ascensionnelle atteignait 25 tonnes. Avec une accélération approximativement égale à celle de la chute libre d'une pierre, la fusée décolla de la table de lancement. *Elle sortit du champ de l'écran du téléviseur, laissant dans son sillage un immense nuage de poussière.''*
Nous allons établir dans ce document l'équation de Tsiolkovsky qui est considérée comme l'équation fondamentale de l'astronautique. Son éponyme Constantin Tsiolkovsky l'a publiée en 1903. Hermann Oberth, Roumain d'expression allemande, la découvrît indépendamment et publia les résultats de ses travaux en 1923 dans son ouvrage '' La fusée, clef des espaces interplanétaires''.
Bien que l'équation en question soit souvent attribuée à Tsiolkovsky, une forme de la formule apparaît dans un traité du mathématicien britannique William Moore publié en 1833, puis dans un article du général-major belge Casimir-Erasme Coquilhat parut en 1873. Il est cependant fort improbable que Tsiolkovsky eu connaissance des travaux de ces deux précurseurs.
Nous commencerons par revenir sur la notion de conservation de la quantité de mouvement, avant d'aborder l'établissement de l'équation puis sa résolution afin de terminer par quelques exemples pratiques d'utilisation.

1 Le recul du canon. Conservation de la quantité de mouvement.

Imaginons un dispositif expérimental qui modélise le tir du projectile d'un canon. Nous allons supposer ici que notre système est installé sur une table à air, telle que l'on en trouve dans les laboratoires de physique des facultés de sciences ou dans les grandes écoles.

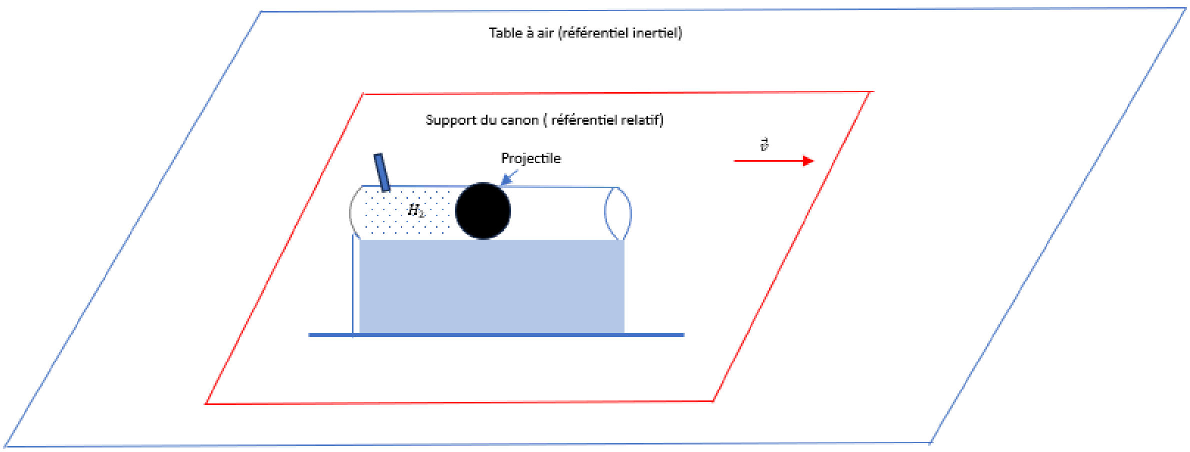


Fig.1. Le canon et son support repose sur une table à air

[1] D'après le livre de Walter Dornberger '' Der Schuβ ins Weltall''.

Le canon est constitué d'un tube monté sur un support animé d'une vitesse initiale $\vec{v}$; un petit dispositif permet la mise à feu de l'hydrogène par décharge électrostatique. Lorsque celle-ci explose, la bille est éjectée du tube (figure 1).
Nous disposons d'une donnée technique pour caractériser notre dispositif, il s'agit de la vitesse d'éjection $\vec{u}$ du projectile par rapport au tube.
Précisons bien les choses : en imaginant un observateur assis sur le tube, celui-ci voit l'explosion et constate que le projectile est éjectée à une vitesse $\vec{u}$ relativement à lui.
Nous allons maintenant appliquer les propriétés de conservation du mouvement à notre système :

Avant l'explosion.

Nous avons l'équation suivante :

$$\vec{P}_{avant} = (M_0 + \Delta m)\vec{v} \qquad (1)$$

où
M_0 est la masse du tube et de son support.
Δm est la masse du projectile
$\vec{v}$ est la vitesse du projectile car nous prenons pour hypothèse que celui-ci se déplace initialement à une vitesse $\vec{v}$

Après l'explosion.

Nous avons :

$$\vec{P}_{arrière} = M_0(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \qquad (2)$$

Nous voyons qu'après l'explosion, l'ensemble tube + support a une nouvelle vitesse $\vec{v} + \Delta\vec{v}$
De son côté, le projectile est éjecté à une vitesse $\vec{u}$ relative à celle du tube et de son support.
Donc la vitesse absolue (vitesse par rapport à la table à air) du projectile de masse Δm est la somme de la vitesse $\vec{u}$ plus la vitesse du tube $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, nous sommes ici en présence d'une composition de vitesse, phénomène bien connue.
La quantité de mouvement étant conservée, nous avons l'égalité :

$$\boxed{\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{arrière} \qquad (3)}$$

En égalisant (1) et (2) :

$$(M_0 + \Delta m)\vec{v} = M_0(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{u} + \vec{v} + \Delta\vec{v})$$

des simplifications sont possibles :

$$\vec{0} = M_0\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{u} + \Delta\vec{v})$$

soit :

$$\boxed{(M_0 + \Delta m)\Delta\vec{v} = -\Delta m\vec{u} \qquad (4)}$$

Regardons cette dernière expression attentivement, il ne reste dans le premier membre que le $\Delta\,\vec{v}$, c'est-à-dire le changement de vitesse induit par l'explosion en fonction de la vitesse d'éjection $\vec{u}$.

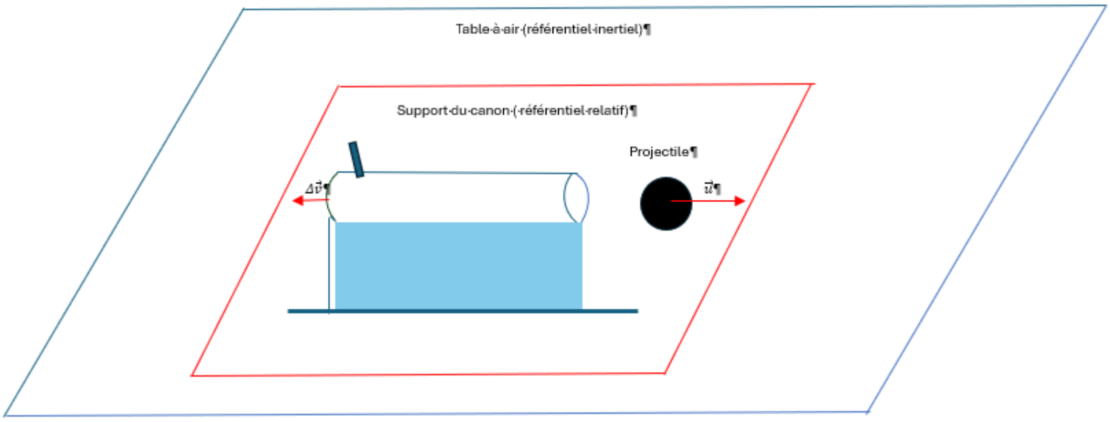


Fig.2. Indication du sens des vitesses après l'explosion.

2 L'équation générale de Tsiolkovsky

Nous allons ici expliciter le phénomène de poussée de la fusée, qui nous amènera à l'équation générale de Tsiolkovsky. La fusée est caractéristique d'un système ouvert.
Admettons que la masse de la fusée diminue selon une loi $m = m(t)$ donnée. Les gaz sont éjectés à la vitesse d'éjection $\vec{u}$ mesurée par rapport à la fusée elle-même. On considère l'évolution du système sur un très court δt petit mais fini. Les données techniques du problème sont les suivantes : entre $t\ et\ t+\ \delta t$, la masse de la fusée varie :

$$m(t+\ \delta t) = m + \frac{dm}{dt}\delta t \qquad (5)$$

m représente la masse de la fusée avec ses ergols entre en un temps $t\ et\ t+\delta t$. La masse éjectée pendant δt vaut :

$$\delta m = -\frac{dm}{dt}\ \delta t > 0\ car\ \frac{dm}{dt} < 0 \qquad (6)$$

La vitesse de la fusée passe de $\vec{v}$ au temps t à $\vec{v}+\ \delta\vec{v}$ au temps $t+\ \delta t$. Examinons maintenant la quantité de mouvement de la fusée et gaz éjectés entre t et $t+\ \delta t$:

- Au temps t : $\quad \vec{p}(t) = m\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la fusée.
- Au temps $t+\ \delta t \quad \delta m = -\frac{dm}{dt}\ \delta t$

En considérant le système fermé fusée + ergols éjectés, la quantité total de mouvement vaut :

$$\vec{P}\ (t+\ \delta t) = m(t+\ \delta t)(\vec{v}+\ \delta\vec{v}) +\ \delta m(\vec{u}+\vec{v}+\delta\vec{v}) \qquad (7)$$

m est la masse de la fusée au temps $t+\ \delta t$ multiplié par la vitesse $\vec{v}+\ \delta\vec{v}$. Le second terme du second membre est la masse δm des ergols éjectés multiplié par la somme de la vitesse de la fusée $\vec{v}+\delta\vec{v}$ et de la vitesse relative $\vec{u}$ des gaz éjectés par la fusée.

Injectons (5) et (6) dans (7) :

$$\vec{P}\ (t+\ \delta t) = \left(m + \frac{dm}{dt}\delta t\right)\ (\vec{v} +\ \delta\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\ \delta t(\vec{u} + \vec{v} + \delta\vec{v}) \qquad (7_1)$$

La deuxième loi de Newton dans sa formulation généralisée implique que si la fusée subit des forces extérieures F(l'attraction terrestre par exemple) et les ergols éjectés une force F^e, on a:

$$\vec{P}(t+\ \delta t) - \vec{P}\ (t) =\ (\vec{F} + \vec{F}^e)\delta t \qquad (8)$$

Cette loi nous dit que la quantité de mouvement a changé entre $t\ et\ \delta t$ parce que des forces s'exercent durant l'intervalle de temps. Injectons (7_1) dans (8) en sachant que $\vec{P}\ (t) = m\vec{v}$, nous avons :

$$(\vec{F} + \vec{F}^e)\delta t =\ \left(m + \frac{dm}{dt}\delta t\right)\ (\vec{v} +\ \delta\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\ \delta t(\vec{u} + \vec{v} + \delta\vec{v}) - m\vec{v} \qquad (7_2)$$

Après développement et simplifications, on obtient :

$$\vec{F}\delta t + \vec{F}^e\ \delta t = m\delta\vec{v} - \frac{dm}{dt}\ \delta t\ \vec{u} \qquad 7_3$$

Examinons maintenant le terme $\vec{F}^e\ \delta t$; la deuxième moi de Newton nous dit que :

$$\vec{F}^e =\ \delta m\frac{d\vec{u}}{dt}\ or\ \delta m =\ -\frac{dm}{dt}\ \delta t$$

donc :

$$\vec{F}^e =\ --\frac{dm}{dt}\ \delta t\ *\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$\vec{F}^e$ est du deuxième ordre, donc $\vec{F}^e \to 0$ lorsque $\delta t \to 0$, finalement 7_3 devient :

$$\vec{F}\delta t = m\delta\vec{v} - \frac{dm}{dt}\ \delta t\ \vec{u} \qquad 7_4$$

En divisant les deux membres par δt et en faisant tendre δt à la limite, nous avons finalement :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\ \vec{u} + \vec{F} \quad (\ 7_5)\ qui\ est\ la\ forme\ générale\ de\ l'équation\ de\ Tsiolkovsky}$$

On peut voir ce calcul comme l'extension à une perte de masse continue du calcul du recul du canon. En jetant une masse δm dans la direction $\vec{u}$, on obtient une accélération dans le sens opposé à $\vec{u}$ (car $\frac{dm}{dt} < 0$). On appelle poussée le terme $\frac{dm}{dt}\ \vec{u}$.
Nous voyons que les deux membres de (7_5) sont homogènes à une force.

Fig.3 Constantin Tsiolkovsky (1857-1935) pionnier de l'astronautique russe découvrit le premier l'équation fondamentale de l'astronautique.

3 Accélération, vitesse et position de la fusée.

L'équation (7_5) est sous forme différentielle, la modification de celle-ci à partir d'hypothèses permettra de déterminer l'expression de l'accélération de la fusée, deux intégrations successives permettront d'accéder respectivement à la vitesse et à la position de l'engin.
Une fusée contient un ensemble de carburant et de comburant que l'on dénomme propergols. Les gaz de combustion sont éjectés à une vitesse relative par rapport à le fusée. On supposera que celui-ci s'échappe verticalement vers le bas de la tuyère. On néglige les frottements de l'air et la variation de la pesanteur avec l'altitude. La masse de combustible est m et la masse inerte de la fusée est M.
En résumé (figure 4):

- Les gaz éjectés ont une direction verticale vers le bas.
- On néglige les frottements de l'air.
- On considère la pesanteur comme étant constante.

Ces hypothèses seront justifiés plus bas.

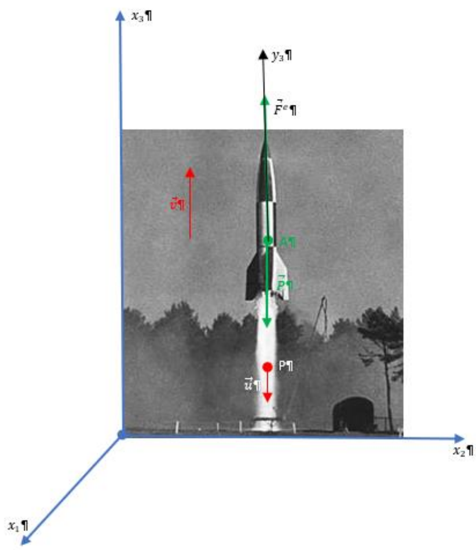


Fig.4. Le référentiel inertiel, terrestre ici, est représenté par le système d'axes (x_1, x_2, x_3).

Le référentiel terrestre est considéré ici comme inertiel et est figuré dur la figure par le système d'axes (x_1, x_2, x_3).Le référentiel accéléré, dont l'origine est en A, est matérialisé par l'axe y_3. En effet, la fusée se meut dans le plan . (x_2, x_3), la composante horizontale de la vitesse $\vec{v}$ étant nulle par hypothèse, tout se passe selon l'axe y_3 . Le point P, matérialisant une molécule de gaz éjectée, évolue à une vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée.

3.1 Accélération de la fusée

Nous partons de la formule (7_5) et nous lui appliquons les données issues de nos hypothèses de travail :

$$(M+m)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{d(M+m)}{dt}\,\vec{u} \qquad (8)$$

La seule force extérieure agissant sur la fusée est son poids :

$$\vec{F} = (M+m)\vec{g} \qquad (9)$$

où $(M+m) = m_0$ est la masse initiale de la fusée. Injectons (9) dans (8) :

$$(M+m)\frac{d\vec{v}}{dt} = (M+m)\vec{g} + \frac{d(M+m)}{dt}\,\vec{u} \qquad (8_1)$$

On divise les deux membres par $(M+m)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{1}{M+m}\frac{d(M+m)}{dt}\,\vec{u} \qquad (8_2)$$

La masse inerte M de la fusée est constante, en conséquence $\frac{dM}{dt} = 0$, l'expression (8_2) évolue comme suit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{1}{M+m}\frac{dm}{dt}\,\vec{u} \qquad (8_3)$$

Le mouvement de la fusée a lieu selon l'axe vertical y_3 du référentiel accéléré. En faisant apparaître le vecteur élémentaire de cette axe, la formule (8_3) devient :

$$\frac{dv}{dt}\hat{e}y_3 = g\hat{e}y_3 + \frac{1}{M+m}\frac{dm}{dt}\,u\hat{e}y_3 \qquad (8_4)$$

Après projection, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{M+m}\frac{dm}{dt} \qquad (8_5)$$

La condition de décollage est une accélération positive de la fusée vers le haut, c'est-à-dire $\frac{dv}{dt} > 0$. Cette condition se traduit dans (8_5) par :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{M+m}\frac{dm}{dt} > 0 => -\frac{u}{M+m}\frac{dm}{dt} > g => -\frac{dm}{dt} > \frac{(m+M)}{u}\ g \quad (8_6)$$

Par conséquent si le débit $\left|\frac{dm}{dt}\right|$ de propergols éjectés par la fusée à l'instant de la mise à feu est supérieur à $\frac{(m+M)}{u}\ g$, la fusée décolle.

Poursuivons.
Prenons pour hypothèse que la masse des propergols suit la loi d'évolution linéaire suivante :

$$m = m_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \qquad (9)$$

où τ est une constante, m_0 est la masse des propergols à l'instant de la mise à feu. Dérivons (9) par rapport au temps :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0}{\tau} \qquad (9_1)$$

En substituant l'équation (9), évaluée au temps de décollage $t = 0$ et l'équation (9_1) dans la condition de décollage (8_6), celle-ci se réduit à :

$$-\left(-\frac{m_0}{\tau}\right) > \frac{(m_0+M)}{u}\ g$$

$$\frac{m_0}{\tau} > \frac{(m_0+M)}{u}\ g \quad => \frac{1}{\tau} > \frac{(m_0+M)}{u\,m_0}\ g$$

soit :

$$\tau < \frac{u}{g}\frac{m_0}{m_0+M} \qquad (10) \quad \textit{condition de décollage de la fusée ne tenant compte que des variables d'état du système.}$$

Une analyse dimensionnelle de (10) indique que τ à la dimension d'un temps.
Nous allons maintenant introduire (9) et (9_1) dans l'équation (8_5) du mouvement de la fusée :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{M + m_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}\left(-\frac{m_0}{\tau}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{m_0}{M + m_0\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}\right) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right) - \frac{t}{\tau}}\right) = a(t) \qquad (10)$$

Cette formule correspond à l'<u>accélération</u> de la fusée.

3.2 Vitesse de la fusée.

Nous reprenons la formule (10) et nous procédons à un changement de variable ; posons :

$$\phi = \frac{t}{\tau} \;\; ; \;\; d(\phi) = d\left(\frac{t}{\tau}\right) \;\; ; \; d(\phi) = \frac{dt}{\tau} \quad => dt = \tau\, d\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

La formule (10) devient :

$$dv = -g\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right) + u\left(\frac{d\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)-\frac{t}{\tau}}\right) = -g\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right) - u\left(\frac{d\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{t}{\tau}-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)}\right) \qquad (10_1)$$

On procède à l'intégration de (10') :

$$v(t) = -g\tau\int d\left(\frac{t}{\tau}\right) - u\int\frac{d\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{t}{\tau}-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)} + \ln C \qquad (10_2)$$

soit après intégration :

$$v(t) = -gt - u\,ln\left[\frac{t}{\tau}-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right] + \ln\, C \qquad (10_3)$$

ou encore :

$$v(t) = -gt - u\,ln\left\{C\,\left[\frac{t}{\tau}-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right]\right\} \qquad (10_4)$$

C est une constante d'intégration qui dépend des conditions initiales du système. La condition initiale sur la vitesse avant le décollage de la fusée est $v(t=0)=0$ donc pour $t=0$, l'équation (10_4) évolue de la façon suivante :

$$-u\,ln\left\{C\,\left[-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right]\right\} = 0 \qquad (10_5)$$

or $u\ \neq 0$, donc :

$$ln\left\{\left[-C\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right]\right\} = 0 \quad => \; -C\left(1+\frac{M}{m_0}\right) = 1 \qquad (10_6)$$

soit :

$$C = -\frac{m_0}{m_0+M} \qquad (10_7)$$

La formule (10_4) devient, en tenant compte des conditions initiales :

$$v(t) = -gt - u\,ln\left\{-\frac{m_0}{m_0+M}\left[\frac{t}{\tau}-\left(1+\frac{M}{m_0}\right)\right]\right\} \qquad (10_8)$$

finalement,

$$v(t) = -gt - u\,ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right] \qquad (10_9)$$

3.3 Position de la fusée.

La démarche est similaire celle menant au calcul de la vitesse. Nous partons de la formule (10_9), son intégration nous donnera la position de la fusée en fonction du temps.

$$\int v(t)\,dt = -g\int t\,dt - u\int ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right]dt + C \qquad (11)$$

$$\int v(t)\,dt = z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - u\int \ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right]dt + C \qquad (11_1)$$

Comme pour le calcul de la vitesse, nous allons procéder à un changement de variable Posons :

$$\phi = \frac{t}{\tau} \;\; ; \;\; d(\phi) = d\left(\frac{t}{\tau}\right) \;\; ; \; d(\phi) = \frac{dt}{\tau} \quad => dt = \tau\, d\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Notre intégrale devient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - u\int \ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right]\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right) + C \qquad (11_2)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - u\,\tau\int \ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right]d\left(\frac{t}{\tau}\right) + C \qquad (11_3)$$

Le mieux à ce stade est de procéder à un nouveau changement de variable. Posons :

$$\beta = 1 - \alpha\frac{t}{\tau} \quad avec \;\; \alpha = \frac{m_0}{m_0 + M}$$

Il vient :

$$d\beta = -\alpha\, d\left(\frac{t}{\tau}\right) \;\; => d\left(\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{1}{\alpha}\,d\beta$$

Notre seconde intégrale devient :

$$\int \ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0 + M} * \frac{t}{\tau}\right]d\left(\frac{t}{\tau}\right) <=> \int ln\,\beta\left(-\frac{1}{\alpha}\right)d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int ln\beta d\beta = -\frac{1}{\alpha}[\beta(ln\beta - 1)]$$

L’expression de la position devient donc :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - u\,\tau\left\{-\frac{1}{\alpha}\left(1 - \alpha\frac{t}{\tau}\right)\left[ln\left(1 - \alpha\frac{t}{\tau}\right) - 1\right]\right\} + C \quad (11_4)$$

La condition initiale sur la position avant le décollage de la fusée est $z(t=0)=0$ donc pour $t=0$, l'équation (11_4) évolue de la façon suivante :

$$z(t=0)=\frac{u\,\tau}{\alpha}\{1[\ln(1)-1]+C\}=-\frac{u\,\tau}{\alpha}+C=0$$

soit :

$$C=\frac{u\,\tau}{\alpha}$$

La formule de la position devient :

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^2-u\,\tau\left\{-\frac{1}{\alpha}\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)\left[ln\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)-1\right]\right\}+\frac{u\,\tau}{\alpha}\quad(11_5)$$

ou encore après factorisation :

$$\boxed{z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+\frac{u\,\tau}{\alpha}\left\{\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)\left[ln\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)-1\right]+1\right\}\quad(11_6)}$$

4 Exemples d'application.

Nous allons maintenant appliquer nos trois formule (10); (10_9); (11_6) à travers quatre exemples. Revenons pour le moment sur les trois hypothèses que nous avons posées au début de ce paragraphe à savoir :

- Les gaz éjectés ont une direction verticale vers le bas.
- On néglige les frottements de l'air.
- On considère la pesanteur comme étant constante.

Après le décollage, la première hypothèse est justifiée lors des premières dizaines de secondes du vol uniquement. Il est essentiel que la fusée traverse le plus rapidement possible les couches denses de l'atmosphère, pour cette raison la direction du tir est verticale. Notons toutefois qu'afin de réduire les contraintes aérodynamiques sur les fusées, la composante horizontale de la vitesse n'est pas rigoureusement nulle. Cette première hypothèse fait que nos formules ne sont pas valables au-delà du fonctionnement du 1er étage.
Les forces des frottements de l'air sont très faibles devant la poussée des fusées.
La troisième hypothèse se justifie de la manière suivante :

4.1 Variation du champ de pesanteur en fonction de l'altitude.

Imaginons un objet situé à une hauteur h de la surface de la Terre :

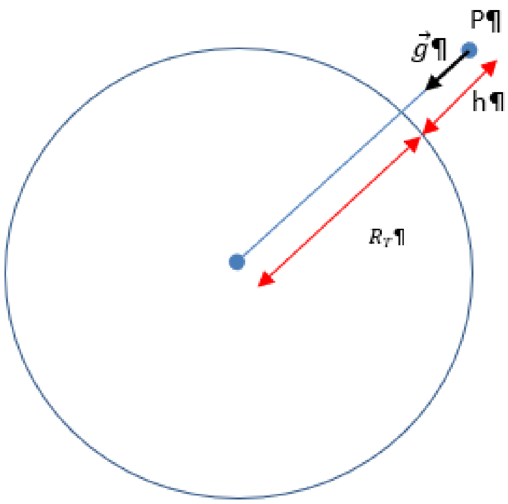


Fig.5. Le champ de pesanteur d'un astre varie en fonction de l'altitude

Rappelons que la seule force à laquelle est soumis l'objet P de masse m est son poids. La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g} \qquad (12)$$

Le module de $\vec{g}$ dépend du rayon de la Terre. Si l'objet P est situé à une hauteur h de la surface de la Terre, l'expression (10) évolue de la manière suivante :

$$g(h) = G * \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \qquad (12_1)$$

Cherchons maintenant la dérivée de g par rapport à h, la définition de la dérivée nous permet d'écrire :

$$\frac{d(g)}{dh} = \frac{g(h) - g(0)}{h} \quad pour\ h \to 0 \qquad (12_2)$$

Multiplions les deux membres par h :

$$h\frac{d(g)}{dh} = g(h) - g(0) \qquad (12_3)$$

soit,

$$g(h) = h\frac{d(g)}{dh} + g(0) \qquad (12_4)$$

On remarque que la représentation graphique de l'expression (12_4) est une droite. En conséquence, pour de faibles variations de la hauteur h, g varie linéairement.

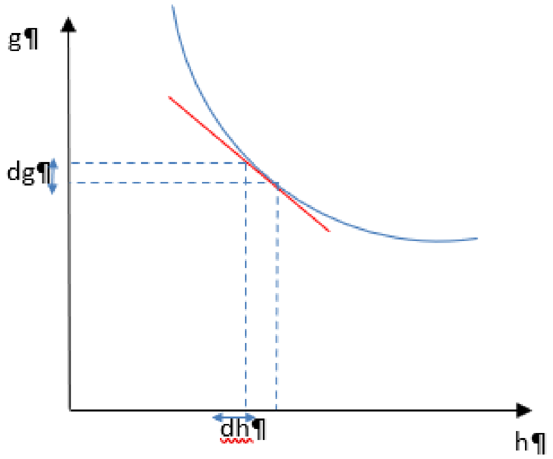


Fig.6. La formule (12_4) est une approximation linéaire de la variation du champ de pesanteur avec l'altitude.

Remplaçons d(g) dans l'expression (12_4) par l'expression (12_1) :

$$g(h) = h\frac{d\left(G * \frac{M_T}{(R_T + h)^2}\right)}{dh} + g(0) \qquad (12_5)$$

Il s'agit maintenant de dériver l'expression $G * \frac{M_T}{(R_T+h)^2}$ par rapport à h. Cette opération, si elle ne représente pas de difficultés techniques particulières, n'a cependant rien d'intuitif pour un débutant. Nous allons donc procéder pas à pas.
Dans un premier temps posons $u = (R_T + h)$, nous avons donc,

$$\frac{d\left(G * \frac{M_T}{(R_T + h)^2}\right)}{dh} = \frac{d\left(G * \frac{M_T}{(u)^2}\right)}{du} * \frac{du}{dh}$$

$$\frac{d\left(G * \frac{M_T}{(R_T + h)^2}\right)}{dh} = \frac{d(G * M_T * u^{-2})}{du} * \frac{d(R_T + h)}{dh}$$

$$\frac{d\left(G * \frac{M_T}{(R_T + h)^2}\right)}{dh} = -2G * M_T * u^{-3} * 1 = -2\frac{G * M_T}{(R_T + h)^3}$$

En conséquence, après l'opération de dérivation, l'expression (12_5) devient :

$$g(h) = g(0) \; - \; 2\frac{G * M_T}{(R_T + h)^3}h \qquad (12_6)$$

Ou encore :

$$g(h) - g(0) = \; - \; 2\frac{G * M_T}{(R_T + h)^3}h \qquad (12_7)$$

On divise les deux membres par $g(0)$:

$$\frac{g(h)-g(0)}{g(0)} = -\ 2\frac{G*M_T*h}{(R_T+h)^3}\ *\frac{1}{g(0)} \qquad (12_8)$$

Or nous vu plus haut que :

$$g(0) = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

L'expression (12_8) devient :

$$\frac{g(h)-g(0)}{g(0)} = -\ 2\frac{G*M_T*h}{(R_T+h)^3}\ *\frac{R_T^2}{G*M_T} \qquad (12_9)$$

Soit,

$$\frac{g(h)-g(0)}{g(0)} = -\ \frac{2*h*R_T^2}{(R_T+h)^3} = -\frac{2*h*R_T^2}{R_T^3\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^3} \qquad (12_{10})$$

Si $\boldsymbol{h} \ll \boldsymbol{R_T}$, alors par un développement limité au 1[er] ordre de (12_{10})

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g(0)} \approx -\frac{2*h}{R_T\left(1+3\frac{h}{R_T}\right)} \qquad (12_{11})}$$

Cette expression exprime la variation relative de g en fonction de h. On remarque que g décroît avec l'altitude.

Application.
Pour une altitude 100 km. La variation relative de g est :

$$\frac{\Delta g}{g(0)} \approx -\frac{2*100}{6370*\left(1+3\frac{100}{6370}\right)} \approx -0{,}3\%$$

Nous pouvons donc considérer le champ de pesanteur comme étant constant entre 0 et 100 km. Notre 3[ème] hypothèse est justifiée.
Nos trois hypothèses ne nous permettent pas d'aller au-delà de l'ordre de grandeur, nous ne cherchons pas la précision, d'autant plus que les données techniques que nous allons utiliser varient selon les auteurs et les sources.

4.2 La fusée A4

La fusée A4, mise au point entre 1937 et 1945 à Peenemünde sur les bord de la Baltique, fut véritablement la première fusée opérationnelle.

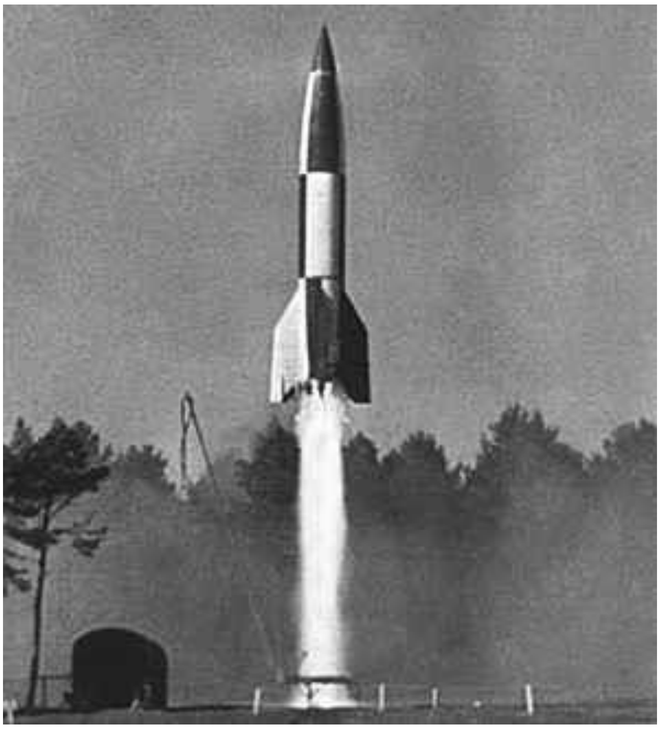


Fig.7. 3 octobre 1942, 1er lancement réussi de la fusée A4. On remarquera les damiers noirs et blancs qui permettent de vérifier la stabilité de l'engin autour de son axe longitudinal.

La fusée A4 est une fusée à étage unique. Dans son livre, Walter Dornberger indique que la masse de la fusée est de 13 tonnes au décollage, que la durée de combustion est de 60s,le débit des propergols est de 130 kgs^{-1} et la vitesse des gaz éjectés de 2000 ms^{-1}.
A partir de ces données, on peut déterminer la masse des propergols au décollage :

$$m_0 = 130 * 60 = 7{,}8\ tonnes$$

La masse inerte de la fusée est donc de :

$$M = 5{,}2\ tonnes$$

On remarque que la masse des propergols au décollage représente 60% de la masse de la fusée au décollage.

la constante τ :

$$\tau = 60s$$

Nous avons donc tous les éléments pour calculer l'accélération, la vitesse et la position de la fusée.

<u>Accélération pour t=0</u>
On utilise la formule (10) :

$$a(t=0) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)}\right) = -9{,}81 + \frac{2000}{60}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{5{,}2}{7{,}8}\right)}\right) \approx 10{,}2\ ms^{-2} \approx 1g$$

<u>Accélération pour t=60s</u>

$$a(t=60) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)-1}\right) = -9{,}81 + \frac{2000}{60}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{5{,}2}{7{,}8}\right)-1}\right) \approx 40\ ms^{-2} \approx 4g$$

<u>Vitesse pour t=0</u>
On utilise la formule (10_9) :

$$v(t=0) = -gt - u\, ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0+M} * \frac{t}{\tau}\right] = 0 + 2000\, ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0+M} * \frac{0}{\tau}\right] = 0$$

<u>Vitesse pour t=60s</u>

$$v(t=60) = -gt - u\, ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0+M}\right] = -587 - 2000\, ln\left[1 - \frac{7{,}8}{7{,}8+5{,}2}\right] \approx 1{,}25\ kms^{-1}$$

<u>Position pour t=0</u>
On utilise la formule (11_6) :

$$z(t=0) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{u\,\tau}{\alpha}\left\{\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)\left[ln\left(1-\alpha\frac{t}{\tau}\right)-1\right]+1\right\}$$

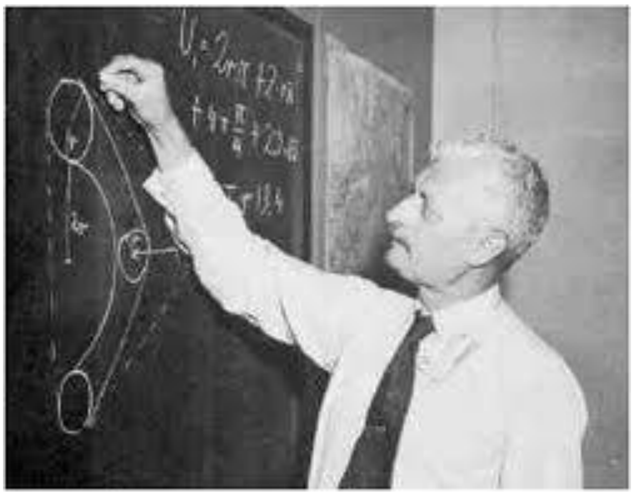
$$z(t=0) = 0 + \frac{u\,\tau}{\alpha}\{(1-0)[ln(1-0)-1]+1\} = 0$$

<u>Position pour t=60s</u>
On commence par calculer le coefficient α et on utilise la formule (11_6)

$$\alpha = \frac{m_0}{m_0+M} = \frac{7{,}8}{5{,}2+7{,}8} = 0{,}6$$

$$z(t=60) = -17658 + 200000\{(1-0{,}6)[ln(1-0{,}6)-1]+1\} \approx 29km$$

Ainsi, après 60s de fonctionnement la combustion est arrêtée, l'altitude de la fusée est alors de 29 km, elle poursuit néanmoins sa course et atteint sa culmination à 90km, elle entame alors sa descente.
Plus connue sous le nom de V2, la fusée A4 sera modernisée par les soviétiques après la guerre. C'est l'ancêtre du missile Scud-A qui connaitra la célébrité pendant la guerre du Golfe en 1991.



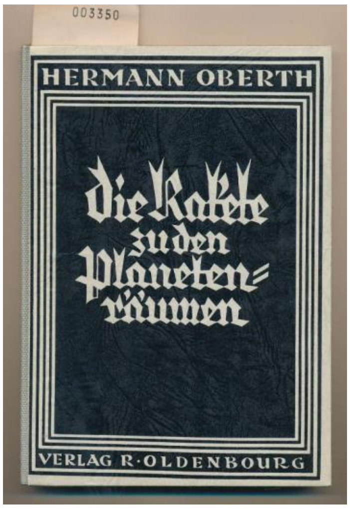


Fig.8. Hermann Oberth découvrit indépendamment de Tsiolkovsky la formule fondamentale de l'astronautique. Il publia ses travaux dans un ouvrage '' La fusée, clef des espaces interplanétaires'', synthèse de ses réflexions et de ses calculs, un ouvrage qui fera date dans l'histoire de l'astronautique. Beaucoup le considère aujourd'hui comme le père spirituel de la fusée A4.

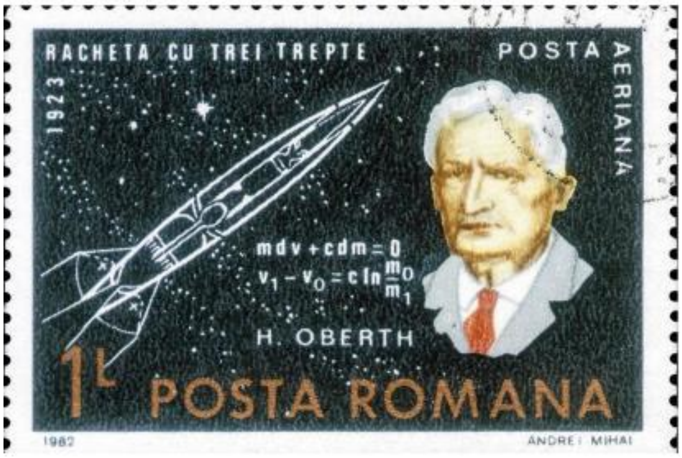


Fig.9 Bien que théoricien, Hermann Oberth n'hésitait pas à mettre la main à la pâte, ici devant un tour en 1929. La poste roumaine émis un timbre en 1982 à l'effigie d'Hermann Oberth à l'occasion du 60ème anniversaire de la publication de son livre. Sur ce timbre, on distingue la formule fondamentale de l'astronautique ainsi qu'une fusée qui ressemble curieusement à l'A4.

Fig.10 Hermann Oberth (de profil au centre) fait la démonstration d'une fusée à carburant liquide à Reinickendorf dans la banlieue de Berlin en 1930. A gauche on distingue Rudolf Nebel, troisième à droite, un jeune homme promis à un brillant avenir : Wernher von Braun.

Fig.10. Le docteur Wernher von Braun est nommé directeur technique de Peenemünde à 25 ans. De 1937 à 1945, il conçoit et met au point la fusée A4. Il fut parmi les 1500 scientifiques allemands, dont 127 ayant travaillé à Peenemünde, exfiltrés par les Américains à la fin de la guerre dans le cadre de l'opération " paperclip". L'extrapolation de la fusée A4 permettra la mise en orbite du premier satellite américain. Il développa ensuite la fusée lunaire Saturn V.

Fig.11. Oberth et von Braun en discussion aux Etats-Unis dans les années 1950. Wernher von Braun vouera toujours reconnaissance et grande estime envers Oberth.

Fig.12 Dans son album ''Objectif Lune '' paru en 1953, Hergé s'inspira de la fusée A4 de von Braun.

4.3 La fusée Saturn V

La compétition entre l'Union Soviétique et les Etats-Unis commence avec la guerre froide. Les armes à base de fusées mise au point par l'Allemagne au cours de la seconde guerre mondiale font l'objet de la plus grande convoitise des pays alliés. Dès 1944, une véritable course de vitesse va s'engager entre ces pays pour récupérer le précieux savoir-faire des ingénieurs allemands.

Le programme Saturn commence très tôt en avril 1957 à Huntsville en Alabama sous la direction de Wernher von Braun. Saturn V, le dernier lanceur de la famille Saturn, complet avec au sommet le vaisseau Apollo mesure 102 m de hauteur, est composé de trois étages et à une masse au décollage de 2900 tonnes. Lors du décollage, le débit des propergols est 13,5 $t * s^{-1}$, la vitesse d'éjection des gaz atteint 2470 ms^{-1}, la durée de combustion du 1er étage est 150 secondes.

Fig.13. Saturn V, ici sur son pas de tir lors de la mission Apollo IV, est probablement la plus belle fusée jamais construite.

Ces données nous permettent de réaliser les calculs préliminaires, nous allons nous ramener à un fonctionnement d'une fusée à étage unique.
Masse totale des propergols consommés lors du fonctionnement du 1er étage :

$$m_0 = 13{,}5 * 150 = 2025\ tonnes$$

On voit que la masse des propergols nécessaire au fonctionnement du 1er étage représente presque 68% de la masse totale de la fusée au décollage.
La masse inerte de la fusée(2ème et 3ème étage avec leur propergols respectifs) vaut :

$$M = 2900 - 2025 = 875\ tonnes$$

Il est maintenant possible de calculer, l'accélération, la vitesse et la position de la fusée pendant le fonctionnement du 1er étage.

<u>Accélération pour t=0</u>
On utilise la formule (10) :

$$a(t=0) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)}\right) = -9{,}81 + \frac{2470}{150}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{875}{2025}\right)}\right) \approx 1{,}7\ ms^{-2} \approx 0{,}2g$$

On constate que l'accélération est très faible à l'instant du décollage.

<u>Accélération pour t=150s</u>

$$a(t=150) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)-1}\right) = -9{,}81 + \frac{2470}{150}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{875}{2025}\right)-1}\right) \approx 28\ ms^{-2} \approx 3g$$

Nous avons vu lors de l'étude de la fusée A4 que vitesse et position était nulle à l'instant du décollage.

<u>Vitesse pour t=150s</u>

$$v(t=150) = -gt - u\ ln\left[1 - \frac{m_0}{m_0+M}\right] = -1472 - 2470\ ln\left[1 - \frac{2025}{875+2025}\right] \approx 1{,}5\ kms^{-1}$$

<u>Position pour t=150s</u>
On commence par calculer le coefficient α et on utilise la formule (11_6)

$$\alpha = \frac{m_0}{m_0+M} = \frac{2025}{2025+875} = 0{,}7$$

$$z(t=150) = -110363 + 529286\{(1-0{,}7)[ln(1-0{,}7)-1]+1\} \approx 69\ km$$

A la fin de la combustion du 1er étage, l'altitude de Saturn V est approximativement de 69 km.
La processus de séparation des étages débute alors.

Fig.14. Décollage de Saturn V

Fig.15. Von Braun avec ses collaborateurs les plus proches à Huntsville, tous des ancien de Peenemünde

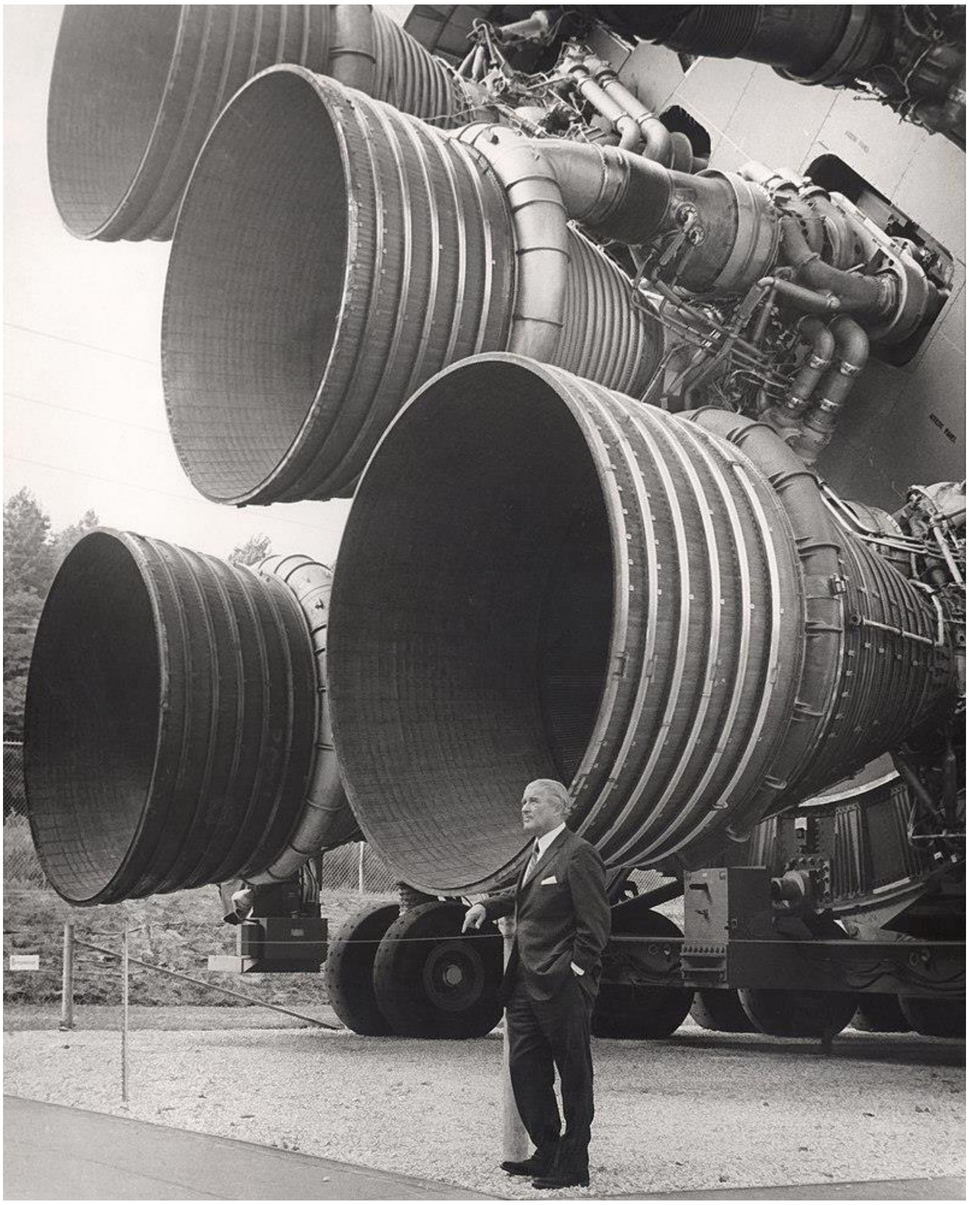


Fig.16. Wernher von Braun,vieillissant, devant les tuyères des moteurs du 1er étage d'une Saturn V.

4.4 La navette spatiale

Après l'épopée lunaire, les aspects commerciaux de de l'industrie spatiale se dessinent nettement : satellites de communication, d'observation, de géolocalisation etc.. En concevant au début des années 1970 un engin réutilisable, les responsables de la NASA espèrent pouvoir abaisser sensiblement les coûts du lancement spatial, qui a, jusque-là, recours à des fusées perdues après usage. L'idée originelle était de concevoir un engin entièrement réutilisable, mais devant la complexité inhérente au concept et à son coût, des compromis sont adoptés : seules la navette et les propulseurs d'appoints seront réutilisables. Le grand réservoir contenant les propergols, très coûteux, sera perdu à chaque mission. Lorsque sa carrière opérationnelle débute en 1982, tous les satellites américains sont pris en charge par les navettes spatiales. Grâce à une politique tarifaire agressive, la navette occupe une place dominante sur le lancement des marchés commerciaux. Mais il apparaît rapidement que la navette ne sera jamais un moyen de lancement concurrentiel par rapport aux fusées, la cadence des lancements espérés ne peut être tenu, la remise en états des propulseurs d'appoint est longue et coûteuse ainsi que la vérification des navettes après chaque mission.
Après la destruction de Challenger en 1986, l'utilisation de la navette est limitée au lancement des satellites non commerciaux et aux expériences scientifiques (sans beaucoup de retombées). La perte de Columbia en 2003 accélère la décision de retirer du service la flotte de navette dont le dernier vol se déroula en juillet 2011. La navette effectua 135 vols entre 1981 et 2011.

Fig.17. 15/11/ 2008, Endeavour s'élance depuis cap Canaveral

La propulsion de la navette lors du décollage est assurée par trois moteurs à propergols liquide solidaires de l'orbiteur et de deux propulseurs d'appoints à propergols solide. Ceux-ci fournissent 70% de la poussée de la navette lors du décollage.
Les deux propulseurs d'appoints fonctionnent pendant 120s avant leur largage et consomment 440 tonnes de propergols chacun. La masse de la navette spatiale au décollage est de l'ordre de 2050 tonnes ; elle dépend cependant de l'orbiteur, chacun d'entre-eux ayant une masse qui lui est propre et de la charge utile.

La difficulté ici, est que le premier étage n'est pas homogène, puisqu'il est constitué des propulseurs d'appoint d'une part et des moteurs de l'orbiteur d'autre part, et que chacun de ces deux modes de propulsions a une vitesse d'éjection des gaz différentes. Nous allons donc faire un modèle du premier étage et considérer que celui-ci ne fonctionne qu'avec les propulseurs d'appoint.
La littérature technique nous indique que la poussée d'un moteur de l'orbiteur des ''213 tonnes '' et que la vitesse des gaz en sortie de tuyère est 3600 ms^{-1}. A partir de ces données, il est possible de calculer le débit d'un moteur, en convertissant la poussée en newtons

$$d_{e1} = \frac{213 * 10^3 * 10}{3600} = 592\ kgs^{-1}$$

Un propulseur d'appoint contient 440 tonnes de propergols, le débit d'un propulseur est donc de :

$$d_{e2} = \frac{440}{120} = 3{,}7\ tonnes\ s^{-1}$$

Ainsi, le débit total des propergols au décollage est de :

$$d_{e\ total} = 3 * d_{e1} + 2 * 3{,}7 = 9{,}2\ ts^{-1}$$

La littérature technique nous indique que la poussée totale au décollage est de 31827 KN, on en déduit la vitesse d'éjection des gaz :

$$u = \frac{31827 * 10^3 *}{9{,}2 * 10^3} = 3460\ ms^{-1}$$

Nous calculons maintenant m_0

$$m_0 = 9{,}2 * 120 = 1104\ t$$

d'où :

$$M = 2050 - 1104 = 946\ t$$

Nous avons le nécessaire pour calculer accélération, vitesse et position :

<u>Accélération pour t=0</u>
On utilise la formule (10) :

$$a(t = 0) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m_0}\right)}\right) = -9{,}81 + \frac{3460}{120}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{946}{1104}\right)}\right) \approx 5{,}6\ ms^{-2} \approx 0{,}6g$$

<u>Accélération pour t=120s</u>

$$a(t = 120) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m_0}\right) - 1}\right) = -9{,}81 + \frac{3460}{120}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{946}{1104}\right) - 1}\right) = 24\ ms^{-2} \approx 2{,}5g$$

<u>Vitesse pour t=120s</u>

$$v(t=120) = -gt - u\,ln\left[1-\frac{m_0}{m_0+M}\right] = -1177 - 3640\,ln\left[1-\frac{1104}{1104+946}\right] \approx 1{,}6\,kms^{-1}$$

La vitesse de la navette est de l'ordre de $1{,}6\ kms^{-1}$ en fin de combustion des propulseurs d'appoint.

<u>Position pour t=120s</u>

On commence par calculer α :

$$\alpha = \frac{1104}{1104+946} = 0{,}53$$

On commence par calculer le coefficient α et on utilise la formule (11_6)

$$z(t=120) = -70632 + 783396\{(1-0{,}53)[ln(1-0{,}53)-1]+1\} \approx 70\ km$$

A la fin de la combustion du 1er étage, les propulseurs d'appoint se séparent de l'orbiteur et retombent dans l'Atlantique

Fig.18 Le télescope Hubble est lancé 24 avril 1990 lors de la mission STS-31 de Discovery. L'une des plus belles réussites du programme navette.

Fig.19. Columbia après l'atterrissage sur la base d'Edwards en Californie terminant ainsi la 1ère mission d'une navette, le 14 avril 1981.

Fig.20. Le drame.28 janvier 1986. Il fait particulièrement froid depuis plusieurs jours à cap à cap Canaveral. Les joints d'étanchéité des propulseurs d'appoint supportent mal les basses températures, un problème bien identifié par la Nasa. La veille du lancement, les responsables de la Nasa et les ingénieurs de la société chargée de la construction et de la maintenance des propulseurs d'appoint, s'entretiennent. Certains d'entre-eux alertent. Le lancement est maintenu. Ce 28 janvier 1986, 73s après le décollage, Challenger explose, tuant les 7 membres d'équipage.

Position pour t=73s
Il possible de calculer l'altitude à laquelle a explosé Challenger en utilisant la formule (11_6)

$$z(t = 73) = -26139 + 783396\{(1 - 0{,}32)[ln(1 - 0{,}32) - 1] + 1\} \approx 19\ km$$

Challenger explosa à une altitude de 19km

1er février 2003 : la fin du programme navette.

Fig.21. Lors du lancement le 16 janvier 2003, un fragment de mousse isolante se détache du réservoir ventral et endommage le bouclier thermique du bord d'attaque de l'aile gauche de l'orbiteur. Columbia se désintégrera le 1er février 2023 lors de sa rentrée dans l'atmosphère, tuant les 7 membres d'équipage.

Fig.22. Un responsable de la Nasa montrant un fragment de mousse isolante lors de l'enquête qui suivie l'accident.

Fig.23. Résultat d'un test en laboratoire simulant l'impact d'un morceau de mousse isolante sur une tuile de la protection thermique

4.5 Ariane V

Dès 1970 le développement spectaculaire des applications spatiales contraint l'Europe à prendre conscience de l'importance politique et économique que constituait l'utilisation de l'espace . Tout laisse présumer que la décennie 1980-1990 verra la mise en place de systèmes spatiaux à des fins commerciales dans le domaine des télécommunications, de la télévision directe, de la météorologie, ou de l'observation de la Terre. Après bien des vicissitudes, un projet d'ensemble est adopté qui débouchera sur le programme Ariane dont le premier vol inaugural se déroula le 24 décembre 1979.

Fig.24 Ariane V lors d'un décollage.

La littérature technique indique que 90% de la poussée est fournie par les propulseurs d'appoint lors du décollage. On considérera ici que la poussée est intégralement fournie par ces derniers.
Un propulseur d'appoint contient 237 tonnes de propergols solides, cette quantité est entièrement consommée en 130s, le débit d'un propulseur est donc de :

$$d_e = \frac{237}{130} \approx 1{,}8\ ts^{-1}$$

La littérature indique que la poussée d'un propulseur d'appoint est de 5,06 MN, on en déduit la vitesse d'éjection u des gaz :

$$u = \frac{5{,}06 * 10^6}{1{,}8 * 10^3} = 2800\ ms^{-1}$$

Calculons m_0 sachant que le débit du moteur vulcain est de 250 kgs^{-1}

$$m_0 = 0{,}25 * 130 + (237 * 2) = 506\ t$$

d'où pour M :

$$M = 770 - 506 = 264t$$

Nous pouvons maintenant calculer accélération, vitesse et position.

<u>Accélération pour t=0</u>

$$a(t=0) \ = \ -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)}\right) = \ -9{,}81 + \ \frac{2800}{130}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{264}{506}\right)}\right) \approx 4{,}4ms^{-2} \ \approx 0{,}4g$$

<u>Accélération pour t=144s</u>

$$a(t=130) = -g + \frac{u}{\tau}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{M}{m_0}\right)-1}\right) = -9{,}81 + \ \frac{2800}{130}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{264}{506}\right)-1}\right) = 31{,}6 \ ms^{-2}$$
$$\approx 3{,}2g$$

<u>Vitesse pour t=130s</u>

$$v(t=130) = \ -gt - u \ ln\left[1-\frac{m_0}{m_0+M}\right] = \ -1275 - 2800 \ ln\left[1-\frac{506}{264+506}\right] \approx 1{,}7 \ kms^{-1}$$

La vitesse d’Ariane V est de l’ordre de 1,7 kms^{-1} en fin de combustion des propulseurs d’appoint.

<u>Position pour t=130s</u>

On commence par calculer α :

$$\alpha = \ \frac{506}{506+264} = 0{,}66$$

On commence par calculer le coefficient α et on utilise la formule (11_6)

$$z(t=130) = \ -82894 + 551515\{(1-0{,}66)[ln(1-0{,}66)-1]+1\} \ \approx 79 \ km$$

Les propulseurs d’appoint cessent de fonctionner à une altitude de 79 km environ.