Forces de marées. Approche heuristique.

Thierry Piou président du Club d'astronomie ''Pêcheurs d'étoiles'' La Baule.

Introduction

Nous nous proposons d'étudier dans l'Univers la force relative à laquelle est soumis un point matériel P de masse m situé à la surface du corps β de masse M_β animé d'un mouvement de révolution autour d'un autre corps α de masse $M_\alpha$avec pour hypothèse $M_\alpha \gg \ M_\beta$ sans tenir compte d'un éventuel mouvement de rotation de β sur lui-même.
On appelle R la distance séparant les centres des corps β et α et r le rayon du corps β avec pour hypothèse $R \gg r$

1.1 Systèmes, référentiels , repères.

Le système est le point matériel P de masse m situé sur le corps β. Le référentiel inertiel, absolu dans notre formalisme (voir ici), est décrit par le repère $(O, x_1, x_2\ , x_3)$ où O est au centre du corps α et $x_1, x_2\ , x_3$ dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes. Le référentiel relatif est décrit par le repère $(A, y_1, y_2\ , y_3)$ dont A est au centre du corps β et $y_1, y\ , y_3$ respectivement parallèles à $x_1, x_2\ , x_3$ (figure 1)

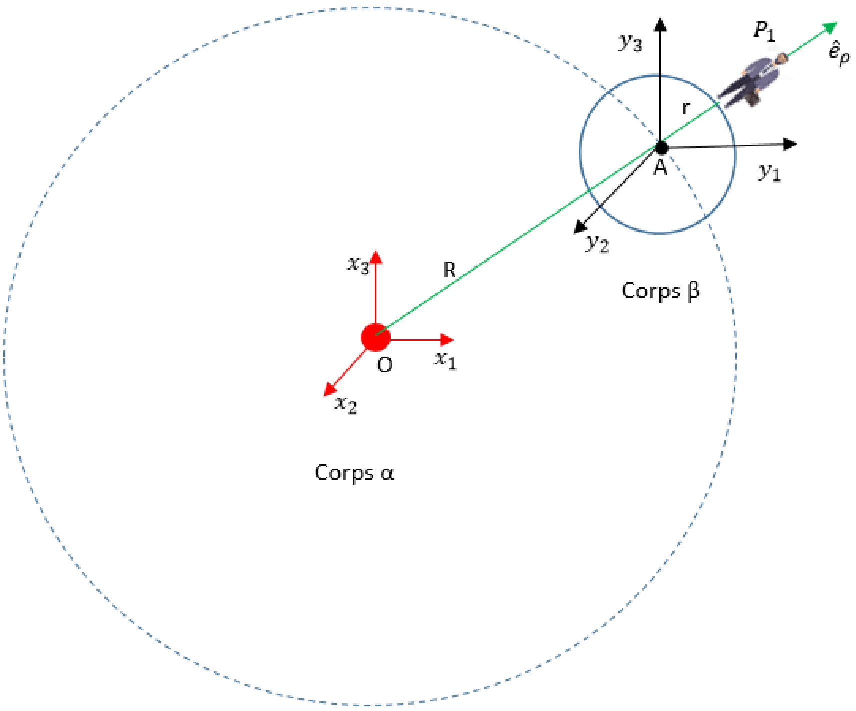

Figure 1 : Vu du corps β, le point P est en opposition par rapport au corps α

1.2 Contraintes

Le mouvement du corps β autour de α est circulaire uniforme à une distance R de centre à centre : $OA = R$. Le rayon du corps β est r.

1.3 Bilan des forces de contraintes.

Le point matériel P est soumis à deux forces par rapport au référentiel absolu :

$$\text{Attraction du corps } \beta \qquad -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (1)$$

$$\text{Attraction du corps } \alpha \qquad -\frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (2)$$

où G est la constante de la gravitation universelle.

1.4 Dynamique du point matériel P.

Si le corps β était immobile, nous aurions à faire à un repère inertiel et la loi de la dynamique s'écrirait $m\vec{a}_a(P) = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho$
mais ici ce n'est pas le cas, le corps β est animé d'un mouvement circulaire uniforme et nous devons utiliser le formalisme que nous avons mis en place :

$$m\vec{a}_r\,(P_1) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r(P) - m\dot{\vec{\Omega}}\wedge\overrightarrow{AP} - m\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AP}\right) \qquad (3)$$

Les contraintes du problème imposent une simplification de (3), en effet les axes du repère sont respectivement parallèles à ceux du repère absolu, le référentiel relatif décrit par le repère $(A, y_1, y\,, y_3)$ n'est donc affecté d'aucun mouvement de rotation sur lui-même, donc $\vec{\Omega} = \vec{0}$
Il vient que :

$$m\vec{a}_r\,(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) \qquad (3')$$

Les forces de contraintes sont les suivantes :

$$\sum_i \vec{F}_i = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho \quad (4)$$

la loi de la dynamique s'écrit :

$$\boxed{m\vec{a}_r\,(P_1) = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho - m\vec{a}_a(A) \qquad (5)}$$

Il nous faut maintenant expliciter le terme $m\vec{a}_a(A)$. Le point A est accéléré par rapport au point O : A est en chute libre par rapport à O, nous pouvons écrire :

$$m\vec{a}_a(A) = -mR\omega^2\hat{e}_\rho \qquad (6)$$

où ω est la vitesse angulaire scalaire du rayon vecteur de direction $\hat{e}_\rho$, la dynamique du point matériel P devient donc :

$$m\vec{a}_r\,(P_1) = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho \underbrace{- \frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho + mR\omega^2\hat{e}_\rho}_{\text{termes de marées}} \qquad (5')$$

La somme vectorielle $-\frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho + mR\omega^2\hat{e}_\rho$ est constituée des termes dit de marées.

Si on étudie le mouvement du corps β depuis le référentiel absolu, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$\vec{a}_a(A) = -R\omega^2\hat{e}_\rho = -\frac{GM_\alpha}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (7)$$

En conséquence l'expression (5') devient :

$$m\vec{a}_r\,(P_1) = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R+r)^2}\,\hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (5'')$$

Nous allons maintenant procéder à une petite transformation algébrique, remarquons que :

$$(R+r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \qquad (8)$$

En mettant R^2 en facteur :

$$(R+r)^2 = R^2\left(1 + 2\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right) = R^2\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 \qquad (8')$$

L'expression (5'') devient alors :

$$m\vec{a}_r\,(P_1) = -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2}\,\hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (5^{(3)})$$

Un développement limité au 1er ordre nous donne :

$$\left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} \approx 1 - 2\,\frac{r}{R} \qquad (8'')$$

L'expression $\left(5^{(3)}\right)$devient :

$$m\vec{a}_r\,(P_1) \approx -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\left(1 - 2\,\frac{r}{R}\right)\hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (5^{(4)})$$

On développe l'expression $(5^{(4)})$:

$$m\vec{a}_r\,(P_1) \approx -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\hat{e}_\rho + 2\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3}\hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (5^{(5)})$$

Soit après simplification :

$$\boxed{m\vec{a}_r\,(P_1) \approx -\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho + 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3}\hat{e}_\rho \qquad (5^{(6)})}$$

Projetons cette relation sur l'axe portant le vecteur unitaire $\hat{e}_\rho$, on obtient

$$F(P_{1)} = \frac{GM_\beta\, m}{r^2} + 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3} \qquad (5^{(7)})$$

<u>Commentons ce résultat :</u>

Le point matériel P est soumis à une première force due au corps β, elle correspond au premier terme de l'expression ($5^{(6)}$).
Il est également soumis à une seconde force de même sens que $\hat{e}_\rho$ et qui en conséquence s'oppose au poids $\vec{P}$ du point matériel.
Considérons maintenant le cas où le point matériel est situé entre le centre du corps α et le centre du corps β (figure 2)

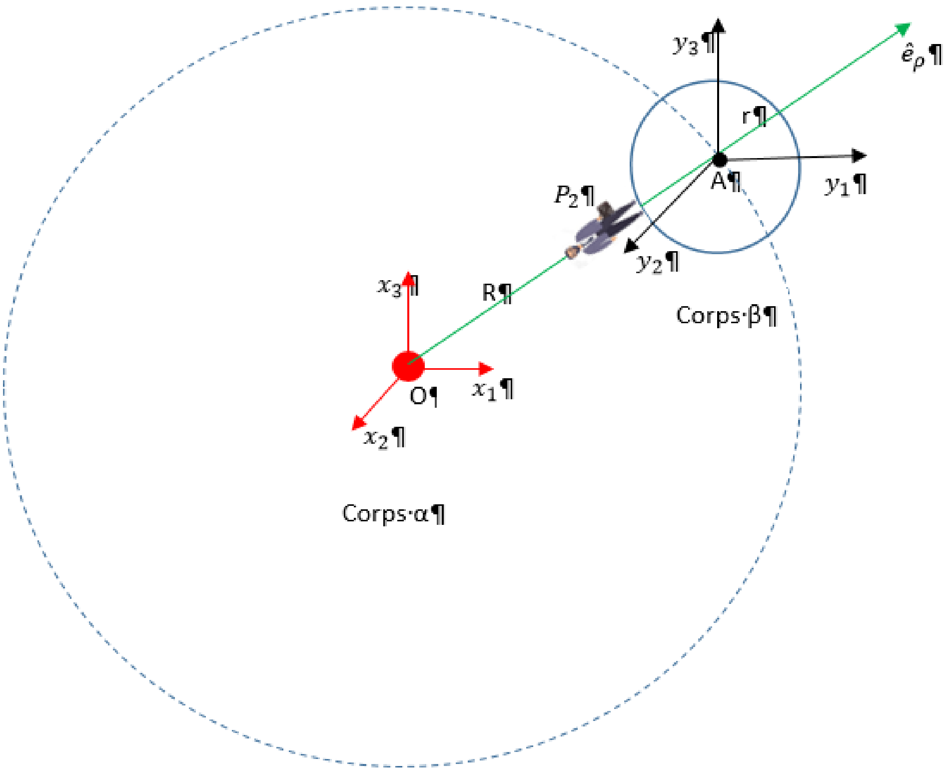

Figure 2 : Vu du corps β, le point P est en conjonction par rapport au corps α

Comme précédemment, faisons le bilan des forces de contraintes s'exerçant sur le point matériel P

$$+\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\hat{e}_\rho$$

La distance entre le corps α et le point matériel P est R-r. L'attraction exercée par α est donc :

$$-\frac{GM_\alpha\, m}{(R-r)^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (9)$$

Notre point matériel est donc soumis à la force :

$$m\vec{a}_r\,(P_2) = +\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R-r)^2}\,\hat{e}_\rho + mR\omega^2\hat{e}_\rho \qquad (10)$$

Comme précédemment nous avons :

$$\vec{a}_a(A) = -R\omega^2\hat{e}_\rho \;= -\frac{GM_\alpha}{R^2}\,\hat{e}_\rho$$

L'expression (10) devient :

$$m\vec{a}_r\,(P_2) = +\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha\, m}{(R-r)^2}\,\hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha\, m}{R^2}\,\hat{e}_\rho \qquad (10')$$

On procède à un développement similaire à celui vu plus haut et tout calcul fait, on obtient :

$$\boxed{m\vec{a}_r\,(P_2) \approx +\frac{GM_\beta\, m}{r^2}\,\hat{e}_\rho - 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3}\hat{e}_\rho \qquad (10'')}$$

Projetons cette relation sur l'axe portant le vecteur unitaire $\hat{e}_\rho$, on obtient

$$F(P_{2)} = \frac{GM_\beta\, m}{r^2} - 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3} \qquad (10^3\,)$$

Commentons ce résultat :
Nous remarquons que le point matériel P est toujours soumis à la force d'attraction du corps β.
Il est également soumis à une seconde force de sens opposé à $\hat{e}_\rho$ et qui s'oppose donc au poids $\vec{P}$ du point matériel. Notons que le module de $m\vec{a}_r\,(P)$ est identique dans les deux expressions $\left(5^{(6)}\right)$ et $(10'')$.
Procédons à la différence $F(P_{1)} - F(P_{2)}$, nous obtenons :

$$F(P_{1)} - F(P_{2)} = \frac{GM_\beta\, m}{r^2} + 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3} - \left(\frac{GM_\beta\, m}{r^2} - 2\,\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3}\right) \qquad (11)$$

soit :

$$\boxed{F(P_{1)} - F(P_{2)} = GM_\alpha m\frac{4r}{R^3} \qquad (11')}$$

La force de marée est donc proportionnelle au rayon du corps β et inversement proportionnelle au cube de la distance séparant les corps α et β.

1.5Généralisation.

Rappelons tout d'abord que la force d'inertie d'entraînement ($m\vec{a}_a(A)\ dans\ l'expression(3')$) <u>est la même dans tout le référentiel accéléré</u>.
Le point matériel est donc soumis à deux forces :

- La force d'inertie d'entraînement $m\vec{a}_a(A)$
- La force centrale d'attraction du corps α que nous noterons $\vec{F}_\alpha$

A tout instant nous avons :

$$\boxed{m\vec{a}_r\,(P) = m\vec{a}_a(A) + \vec{F}_\alpha \qquad (12)}$$

Ceci est illustré à la figure 3. Remarquons qu'au centre du corps β, ces deux forces se compensent :

$$m\vec{a}_r\,(P) = m\vec{a}_a(A) + \vec{F}_\alpha = \vec{0} \qquad (12')$$

d'ailleurs l'expression ($5^{(6)}$) le montre très bien : si $r = 0$, alors $\vec{F}_m = 2\frac{GM_\alpha\, mr}{R^3}\hat{e}_\rho = \vec{0}$

Le centre du corps β subit une accélération-$\frac{GM_\beta M_\alpha}{R^2}$ $\hat{e}_\rho$, il est en chute libre autour du corps α.

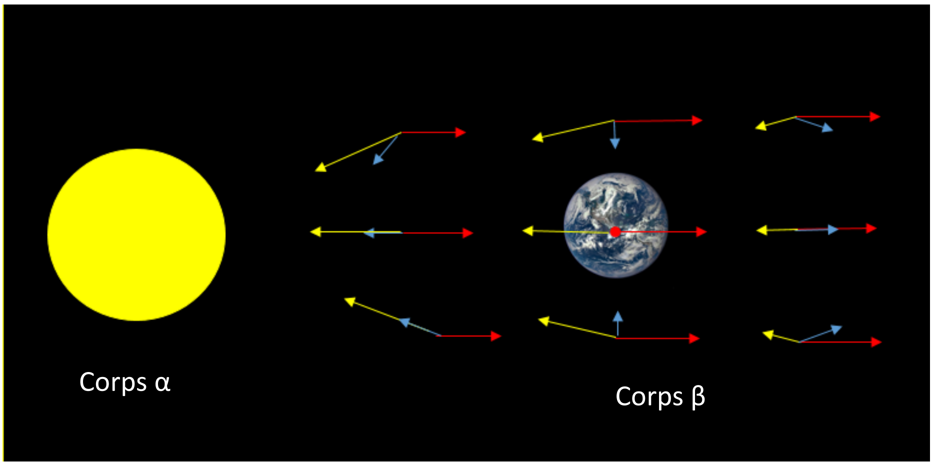

Figure 3 : la force d'inertie d'entraînement, en rouge, est la même dans tout le référentiel accéléré.

Nous venons de voir que $m\vec{a}_a(A)$ est constant dans le référentiel accéléré, mais ce n'est pas le cas de $\vec{F}_\alpha$, plus on se rapproche du corps α, plus sa force d'attraction est grande.
Le corps β se déforme sous l'effet des forces de marées (figure 4), il est allongé dans la direction corps α-corps β et comprimé selon une direction perpendiculaire à cet axe.

Figure 4 : déformation d'un corps sous l'effet des forces de marées.

Mars 2022

Thierry Piou.