

Calcul de la déclinaison du Soleil en fonction de la date de l'année

1.1 Etablissement de la formule de la déclinaison en fonction du temps.

On rappelle que la déclinaison du Soleil est l'angle que forment le plan équatorial et la direction du Soleil.(figure 1).

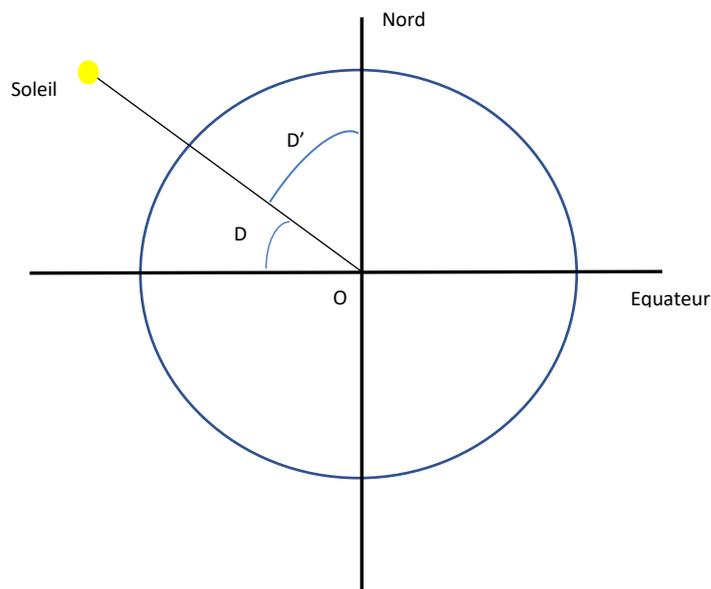


Fig.1

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la déclinaison du Soleil. La première méthode se base sur l'hypothèse d'une orbite terrestre circulaire. C'est la méthode la plus simple, mais elle nécessite l'introduction de facteurs correctifs.

La seconde méthode, plus complexe, tient compte de l'ellipticité de la trajectoire de la Terre. Une troisième solution, obtenue par développement en séries de Fourier, a été proposée par Spencer en 1971. Les spécialistes considèrent cette méthode comme étant la plus précise.

Dans ce document, nous utiliserons la première méthode et nous prendrons donc comme hypothèse de travail une orbite terrestre circulaire.

On rappelle que la déclinaison D du Soleil est l'angle que forment les plans équatorial et écliptique. Sur la figure 1. L'angle D' est le complémentaire de l'angle D , il est donc l'angle que fait le rayon OS avec l'axe des pôles ON .

L'axe ON garde une direction fixe dans l'espace. Si on se place du point de vue de la Terre, on peut considérer que S décrit un cercle autour de O . Au cours de l'année on peut exprimer l'angle D' qui existe entre l'axe des pôles et la direction OS .(figure2).

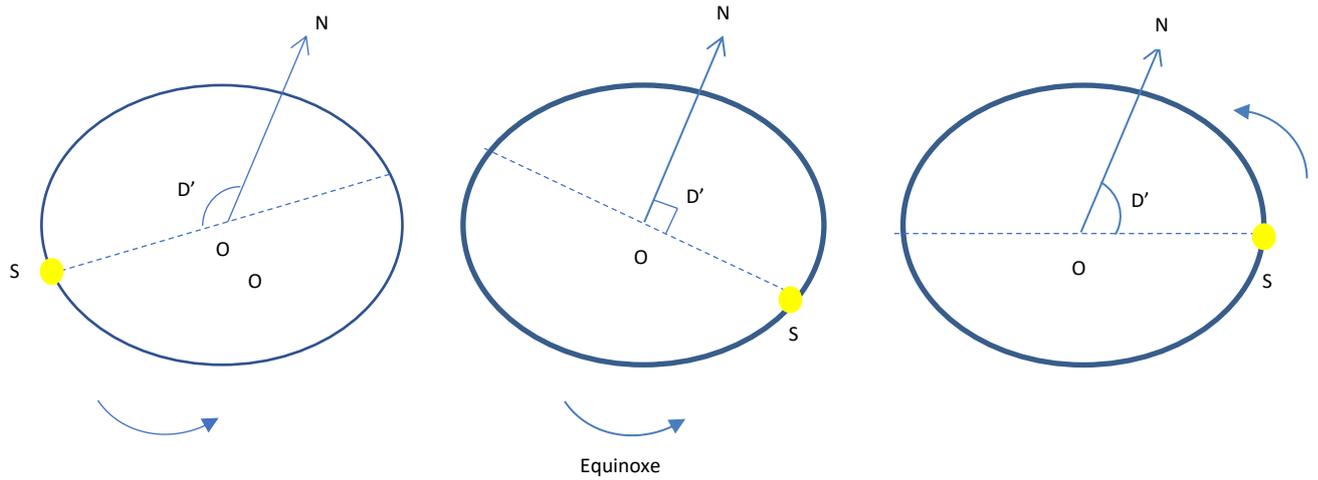


Fig.2

Plaçons-nous dans un repère orthonormé dont le plan de référence est l'écliptique. Les axes OXY sont dans le plan de l'écliptique. De son côté l'axe OZ est perpendiculaire à ce plan (figure 3). L'angle α correspond à l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique. Cet angle est constant et vaut $23,4^\circ$.

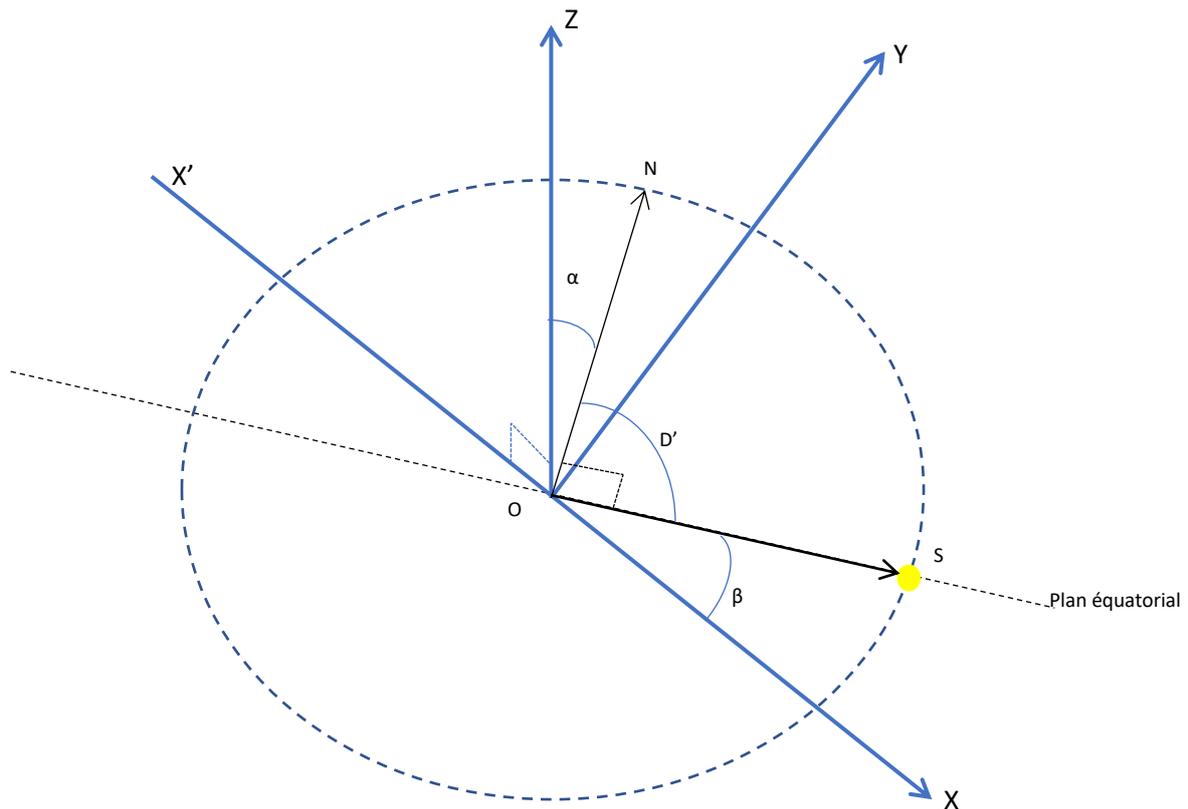


Fig.3

Afin de simplifier les calculs, nous allons considérer le cas du jour de l'équinoxe. Dans cette configuration l'axe des pôles est perpendiculaire à OX .
 Nous prendrons comme hypothèse :

$$|\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OS}| = 1$$

\overrightarrow{OS} est bien entendu dans le plan de l'écliptique. Cherchons le produit scalaire $\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON}$. Ce produit scalaire est égal au produit de la mesure algébrique de \overrightarrow{OS} par la projection orthogonale de \overrightarrow{ON} sur l'axe supportant \overrightarrow{OS} . Cette longue phrase se traduit par l'expression :

$$\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OS} * \overline{proj_{X,X} \overrightarrow{ON}}$$

Que l'on peut encore traduire sous cette forme :

$$\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{ON}| * |\overrightarrow{OS}| * \cos D' = \cos D'$$

Nous venons d'écrire le produit scalaire $\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON}$ sous sa forme géométrique, mais nous pouvons aussi l'exprimer sous sa forme cartésienne, posons :

$$\overrightarrow{ON} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OS} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Nous avons alors,

$$\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON} = xx' + yy' + zz'$$

Cherchons les composantes des vecteurs \overrightarrow{ON} et \overrightarrow{OS} dans le repère (O, X, Y, Z) . Commençons par rechercher la projection de \overrightarrow{ON} sur l'axe OX (figure 4).

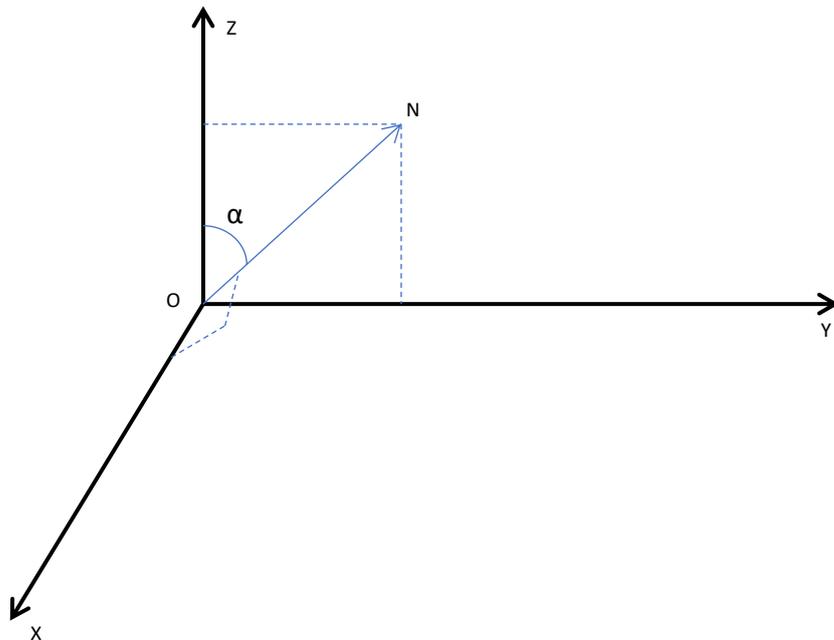


Fig.4

Commençons par rechercher la projection de \overrightarrow{ON} sur l'axe OX. Par hypothèse OX et \overrightarrow{ON} sont perpendiculaires, donc :

$$\overline{proj_{OX}\overrightarrow{ON}} = 0$$

Recherchons maintenant la projection du vecteur \overrightarrow{ON} sur l'axe OY. Comme \overrightarrow{ON} est perpendiculaire à OX, le vecteur \overrightarrow{ON} est dans le plan YOZ, en conséquence :

$$\overline{proj_{OY}\overrightarrow{ON}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

Cherchons maintenant la projection du vecteur \overrightarrow{ON} sur l'axe OZ :

$$\overline{proj_{OZ}\overrightarrow{ON}} = \cos \alpha$$

En conséquence, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{ON} dans le repère OXYZ sont les suivantes :

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Cherchons maintenant les composantes du vecteur \overrightarrow{OS} dans le repère OXYZ. Le vecteur \overrightarrow{OS} est dans le plan de l'écliptique (figure 5).

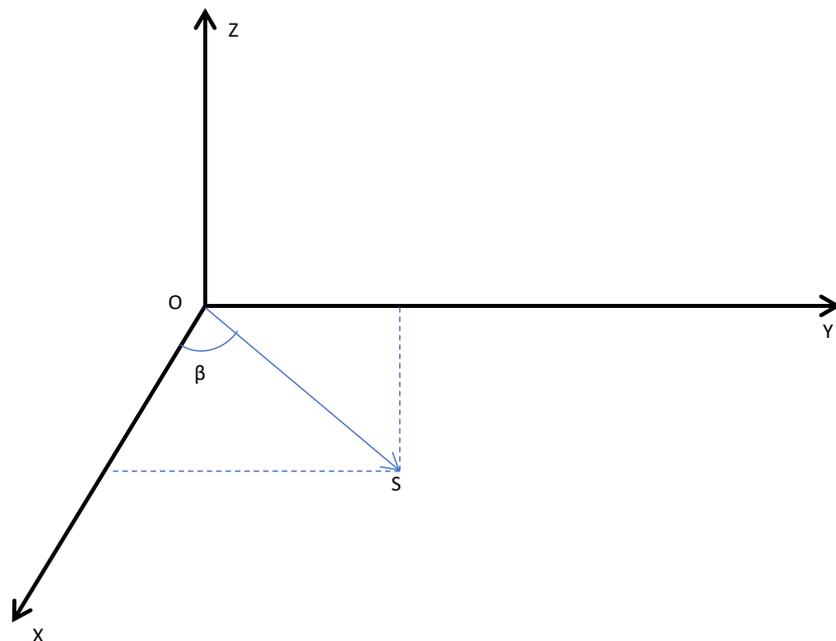


Fig.5

Cherchons la projection du vecteur \overrightarrow{OS} sur l'axe OX :

$$\overline{proj_{OX}\overrightarrow{OS}} = \cos \beta$$

Cherchons maintenant la projection du vecteur \overrightarrow{OS} sur l'axe OY :

$$\overline{proj_{OY}\overrightarrow{OS}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta$$

La projection du vecteur \overrightarrow{OS} sur l'axe OZ est nulle, en conséquence les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OS} dans le repère OXYZ sont :

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON} = 0 * \cos \beta + \sin \alpha * \sin \beta + \cos \alpha * 0 = \sin \alpha * \sin \beta$$

Or nous avons vu que d'un point de vue géométrique

$$\overrightarrow{OS} * \overrightarrow{ON} = D'$$

Donc,

$$\sin \alpha * \sin \beta = \cos D'$$

Exprimons D'en fonction de D :

$$D + D' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D' = \frac{\pi}{2} - D$$

$$\cos D' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - D\right) = \sin D$$

D'où finalement

$$\sin D = \sin \alpha \cos \beta$$

D'après nos hypothèses, vu de la Terre le Soleil tourne autour d'elle avec une vitesse angulaire ω constante égale à un tour en une année (donc égale à 360° en 360,25 jours) ; si on choisit de compter les durées t à partir de l'équinoxe de printemps on a $\beta = \omega t$. par ailleurs, l'angle α que fait l'axe des pôles avec OZ est constant et égal à $23,4^\circ$, il vient :

$$\sin D = \sin \alpha \cos \omega t \quad (1)$$

1.2 Construction de la Table de déclinaison en fonction de la date.

Comme je l'ai précisé en introduction, la formule (1) ne peut être utilisée directement, la trajectoire du Soleil n'étant pas rigoureusement circulaire. Je dois avouer que l'élaboration de cette Table ne fut pas simple.

Tout d'abord, j'ai dû faire évoluer la formule (1) de la manière suivante :

$$D = \arcsin \left[\sin(23,45^\circ) * \cos \left(\frac{360}{365,242199} t \right) \right] \quad (2)$$

Pour pouvoir utiliser la formule (2), j'ai inventé une année virtuelle dotée de deux origines temporelles : l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne. Dans le tableau ci-dessous, la 1^{ère} colonne est le numéro du jour considéré dans l'année civile, la 2^{ème} colonne la date du jour considéré, la 3^{ème} colonne est le numéro du jour considéré dans l'année virtuelle et enfin la 4^{ème} colonne est la déclinaison du Soleil à la date considérée.

Mais, même en procédant ainsi le décalage était important puisque l'équinoxe d'automne tombait le..... 19 septembre..... ????

J'étais coincé...il m'a fallu du temps avant d'avoir l'idée d'utiliser les propriétés de symétrie de la sinusoïde, en effet la formule (2) est une fonction sinusoïdale du temps.

Regardons la figure ci-dessous (figure6).qui représente la fonction $y = \sin x$

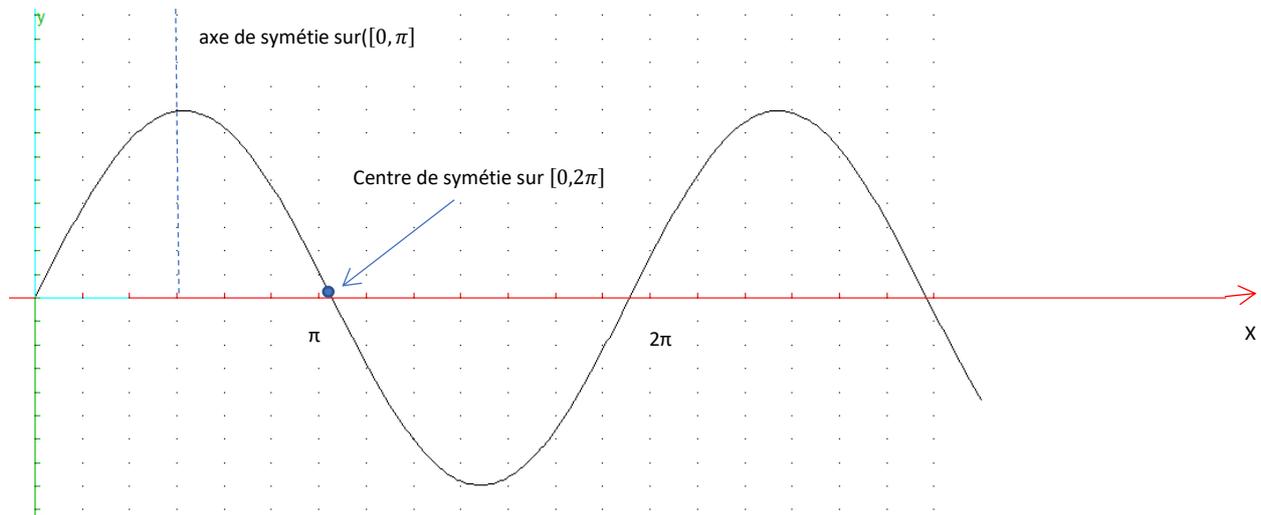


Fig.6

La sinusoïde $[0, 2\pi]$ a un centre de symétrie, en effet :

$$\sin(-x) = -\sin x$$

La demi-sinusoïde, elle, $[0, \pi]$ a un axe de symétrie :

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

Ainsi à l'aide des deux origines temporelles et des propriétés de symétries de la sinusoïde, j'ai considéré que la Terre effectuait une succession de quatre quart de cercle indépendants autour du Soleil. J'évitais ainsi la cumulation des erreurs dues à la nature elliptique de la trajectoire de la Terre autour de notre étoile.

- Le premier quart s'étend du 21 mars au 22 juin. Pendant cette durée la sinusoïde est positive et croissante, les jours sont incrémentés de 0 (21 mars) à 93 (22 juin).

- Le second quart s'étend du 23 juin au 23 septembre. Pendant cette durée la sinusoïde est positive et décroissante les jours sont décréments de 92 (23 juin) à 0 (23 septembre).
- Le troisième quart s'étend du 24 septembre au 22 décembre. Pendant cette durée la sinusoïde négative et décroissante, les jours sont décréments de -1 à -89.
- Le dernier quart s'étend du 23 décembre au 20 mars. Pendant cette durée la sinusoïde est négative et croissante, les jours incréments de -88 à -1.

A partir de la formule (2) et des propriétés de symétrie de la sinusoïde, on établit la table de déclinaison suivante :

Table approximative de la déclinaison du Soleil sur une année non bissextile

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
1	01/01	-79	-22,89°
2	02/01	-78	-22,80°
3	03/01	-77	-22,70°
4	04/01	-76	-22,59°
5	05/01	-75	-22,48°
6	06/01	-74	-22,36°
7	07/01	-73	-22,23°
8	08/01	-72	-22,09°
9	09/01	-71	-21,95°
10	10/01	-70	-21,8°
11	11/01	-69	-21,65°
12	12/01	-68	-21,49°
13	13/01	-67	-21,32°
14	14/01	-66	-21,15°
15	15/01	-65	-20,95
16	16/01	-64	-20,78°
17	17/01	-63	-20,59°
18	18/01	-62	-20,39°
19	19/01	-61	-20,18°
20	20/01	-60	-19,97°
21	21/01	-59	-19,75°
22	22/01	-58	-19,53°
23	23/01	-57	-19,3°
24	24/01	-56	-19,07°
25	25/01	-55	-18,83°
26	26/01	-54	-18,56°
27	27/01	-53	-18,33°
28	28/01	-52	-18,08°
29	29/01	-51	-17,82°
30	30/01	-50	-17,55°
31	31/01	-49	-17,28°
32	01/02	-48	-17°
33	02/02	-47	-16,72°
34	03/02	-46	-16,44°
35	04/02	-45	-16,15°
36	05/02	-44	-15,85°
37	06/02	-43	-15,56°
38	07/02	-42	-15,25°
39	08/02	-41	-14,85°
40	09/02	-40	-14,63°
41	10/02	-39	-14,32°
42	11/02	-38	-14°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
43	12/02	-37	-13,68°
44	13/02	-36	-13,35°
45	14/02	-35	-13,02
46	15/02	-34	-12,69°
47	16/02	-33	-12,35°
48	17/02	-32	-12,01°
49	18/02	-31	-11,67°
50	19/02	-30	-11,32°
51	20/02	-29	-10,97°
52	21/02	-28	-10,62°
53	22/02	-27	-10,26°
54	23/02	-26	-9,91°
55	24/02	-25	-9,55°
56	25/02	-24	-9,19°
57	26/02	-23	-8,82°
58	27/02	-22	-8,45°
59	28/02	-21	-8,08°
60	01/03	-20	-7,71°
61	02/03	-19	-7,34°
62	03/03	-18	-6,96°
63	04/03	-17	-6,59°
64	05/03	-16	-6,21°
65	06/03	-15	-5,83°
66	07/03	-14	-5,45°
67	08/03	-13	-5,06°
68	09/03	-12	-4,68°
69	10/03	-11	-4,29°
70	11/03	-10	-3,91°
71	12/03	-9	-3,52°
72	13/03	-8	-3,13°
73	14/03	-7	-2,74°
74	15/03	-6	-2,35°
75	16/03	-5	-1,96°
76	17/03	-4	-1,57°
77	18/03	-3	-1,18°
78	19/03	-2	-0,78°
79	20/03	-1	-0,39°
80	21/03	0	+0,0°
81	22/03	1	+0,39°
82	23/03	2	+0,78°
83	24/03	3	+1,18°
84	25/03	4	+1,57°
85	26/03	5	+1,96°
86	27/03	6	+2,35°
87	28/03	7	+2,74°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
88	29/03	8	+3,13°
89	30/03	9	+3,52°
90	31/03	10	+3,91°
91	01/04	11	+4,30°
92	02/04	12	+4,68°
93	03/04	13	+5,06°
94	04/04	14	+5,44°
94	05/04	15	+5,83°
96	06/04	16	+6,21°
97	07/04	17	+6,59°
98	08/04	18	+6,96°
99	09/04	19	+7,34°
100	10/04	20	+7,71°
101	11/04	21	+8,08°
102	12/04	22	+8,45°
103	13/04	23	+8,83°
104	14/04	24	+9,19°
105	15/04	25	+9,55°
106	16/04	26	+9,91°
107	17/04	27	+10,27°
108	18/04	28	+10,62°
109	19/04	29	+10,97°
110	20/04	30	+11,32°
111	21/04	31	+11,67°
112	22/04	32	+12,01°
113	23/04	33	+12,35°
114	24/04	34	+12,69°
115	25/04	35	+13,02°
116	26/04	36	+13,35°
117	27/04	37	+13,68°
118	28/04	38	+14,00°
119	29/04	39	+14,32°
120	30/04	40	+14,64°
121	01/05	41	+14,95°
122	02/05	42	+15,26°
123	03/05	43	+15,56°
124	04/05	44	+15,86°
125	05/05	45	+16,15°
126	06/05	46	+16,44°
127	07/05	47	+16,73°
128	08/05	48	+17°
129	09/05	49	+17,28°
130	10/05	50	+17,55°
131	11/05	51	+17,82°
132	12/05	52	+18,08°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
133	13/05	53	+18,34°
134	14/05	54	+18,59°
135	15/05	55	+18,83°
136	16/05	56	+19,07°
137	17/05	57	+19,31°
138	18/05	58	+19,53°
139	19/05	59	+19,76°
140	20/05	60	+19,97°
141	21/05	61	+20,18°
142	22/05	62	+20,39°
143	23/05	63	+20,59°
144	24/05	64	+20,78°
145	25/05	65	+20,97°
146	26/05	66	+21,15°
147	27/05	67	+21,32°
148	28/05	68	+21,49°
149	29/05	69	+21,65°
150	30/05	70	+20,81°
151	31/05	71	+21,96°
152	01/06	72	+22,10°
153	02/06	73	+22,23°
154	03/06	74	+22,36°
155	04/06	75	+22,48°
156	05/06	76	+22,60°
157	06/06	77	+22,70°
158	07/06	78	+22,80°
159	08/06	79	+22,89°
160	09/06	80	+22,98°
161	10/06	81	+23,06°
162	11/06	82	+23,13°
163	12/06	83	+23,20°
164	13/06	84	+23,25°
165	14/06	85	+23,30°
166	15/06	86	+23,34°
167	16/06	87	+23,38°
168	17/06	88	+23,41°
169	18/06	89	+23,43°
170	19/06	90	+23,44°
171	20/06	91	+23,44°
172	21/06	92	+23,45°
173	22/06	93	+23,43°
174	23/06	92	+23,45°
175	24/06	91	+23,45°
176	25/06	90	+23,44°
177	26/06	89	+23,43°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
178	27/06	88	+23,41°
179	28/06	87	+23,38°
180	29/06	86	+23,35°
181	30/06	85	+23,30°
182	01/07	84	+23,25°
183	02/07	83	+23,20°
184	03/07	82	+23,13°
185	04/07	81	+23,06°
186	05/07	80	+22,98°
187	06/07	79	+22,89°
188	07/07	78	+22,80°
189	08/07	77	+22,70°
190	09/07	76	+22,59°
191	10/07	75	+22,48°
192	11/07	74	+22,36°
193	12/07	73	+22,23°
194	13/07	72	+22,10°
195	14/07	71	+21,96°
196	15/07	70	+21,81°
197	16/07	69	+21,65°
198	17/07	68	+21,49°
199	18/07	67	+21,32
200	19/07	66	+21,15°
201	20/07	65	+20,97°
202	21/07	64	+20,78°
203	22/07	63	+20,59°
204	23/07	62	+20,39°
205	24/07	61	+20,18°
206	25/07	60	+19,97°
207	26/07	59	+19,76°
208	27/07	58	+19,53°
209	28/07	57	+19,31°
210	29/07	56	+19,07°
211	30/07	55	+18,83°
212	31/07	54	+18,59°
213	01/08	53	+18,34°
214	02/08	52	+18,08°
215	03/08	51	+17,82°
216	04/08	50	+17,55°
217	05/08	49	+17,28°
218	06/08	48	+17,00°
219	07/08	47	+16,73°
220	08/08	46	+16,44°
221	09/08	45	+16,15°
222	10/08	44	+15,86°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
223	11/08	43	+15,56°
224	12/08	42	+15,26°
225	13/08	41	+14,95°
226	14/08	40	+14,64°
227	15/08	39	+14,32°
228	16/08	38	+14,00°
229	17/08	37	+13,68°
230	18/08	36	+13,55°
231	19/08	35	+13,02°
232	20/08	34	+12,69°
233	21/08	33	+12,35°
234	22/08	32	+12,01°
235	23/08	31	+11,67°
236	24/08	30	+11,32°
237	25/08	29	+10,97°
238	26/08	28	+10,62°
239	27/08	27	+10,27°
240	28/08	26	+9,91°
241	29/08	25	+9,55°
242	30/08	24	+9,19°
243	31/08	23	+8,82°
244	01/09	22	+8,45°
245	02/09	21	+8,09°
246	03/09	20	+7,71°
247	04/09	19	+7,34°
248	05/09	18	+6,96°
249	06/09	17	+6,59°
250	07/09	16	+6,21°
251	08/09	15	+5,83°
252	09/09	14	+5,45°
253	10/09	13	+5,06°
254	11/09	12	+4,68°
255	12/09	11	+4,29°
256	13/09	10	+3,91°
257	14/09	9	+3,52°
258	15/09	8	+3,13°
259	16/09	7	+2,74°
260	17/09	6	+2,35°
261	18/09	5	+1,96°
262	19/09	4	+1,57°
263	20/09	3	+1,18°
264	21/09	2	+0,78°
265	22/09	1	+0,39°
266	23/09	0	0°
267	24/09	-1	-0,39°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
268	25/09	-2	-0,78°
269	26/09	-3	-1,18°
270	27/09	-4	-1,57°
271	28/09	-5	-1,96°
272	29/09	-6	-2,35°
273	30/09	-7	-2,74°
274	01/10	-8	-3,13°
275	02/10	-9	-3,52°
276	03/10	-10	-3,91°
277	04/10	-11	-4,29°
278	05/10	-12	-4,68°
279	06/10	-13	-5,06°
280	07/10	-14	-5,45°
281	08/10	-15	-5,83°
282	09/10	-16	-6,21°
283	10/10	-17	-6,59°
284	11/10	-18	-6,96°
285	12/10	-19	-7,34°
286	13/10	-20	-7,71°
287	14/10	-21	-8,08°
288	15/10	-22	-8,45°
289	16/10	-23	-8,82°
290	17/10	-24	-9,19°
291	18/10	-25	-9,55°
292	19/10	-26	-9,91°
293	20/10	-27	-10,26°
294	21/10	-28	-10,62°
295	22/10	-29	-10,97°
296	23/10	-30	-11,32°
297	24/10	-31	-11,67°
298	25/10	-32	-12,01°
299	26/10	-33	-12,35°
300	27/10	-34	-12,69°
301	28/10	-35	-13,02°
302	29/10	-36	-13,35°
303	30/10	-37	-13,68°
304	31/10	-38	-14,00
305	01/11	-39	-14,32°
306	02/11	-40	-14,63°
307	03/11	-41	-14,95°
308	04/11	-42	-15,25°
309	05/11	-43	-15,56°
310	06/11	-44	-15,85°
311	07/11	-45	-16,15
312	08/11	-46	-16,44°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
313	09/11	-47	-16,72°
314	10/11	-48	-17,00°
315	11/11	-49	-17,28°
316	12/11	-50	-17,55°
317	13/11	-51	-17,82°
318	14/11	-52	-18,08°
319	15/11	-53	-18,33°
320	16/11	-54	-18,58°
321	17/11	-55	-18,83°
322	18/11	-56	-19,07°
323	19/11	-57	-19,30°
324	20/11	-58	-19,53°
325	21/11	-59	-19,75°
326	22/11	-60	-19,97°
327	23/11	-61	-20,18°
328	24/11	-62	-20,39°
329	25/11	-63	-20,59°
330	26/11	-64	-20,78°
331	27/11	-65	-20,96°
332	28/11	-66	-21,15°
333	29/11	-67	-21,32°
334	30/11	-68	-21,49°
335	01/12	-69	-21,65°
336	02/12	-70	-21,8°
337	03/12	-71	-21,95°
338	04/12	-72	-22,09°
339	05/12	-73	-22,23°
340	06/12	-74	-22,36°
341	07/12	-75	-22,48°
342	08/12	-76	-22,59°
343	09/12	-77	-22,70°
344	10/12	-78	-22,80°
345	11/12	-79	-22,89°
346	12/12	-80	-22,98°
347	13/12	-81	-23,06°
348	14/12	-82	-23,13
349	15/12	-83	-23,19°
350	16/12	-84	-23,25°
351	17/12	-85	-23,30°
352	18/12	-86	-23,34°
353	19/12	-87	-23,38°
354	20/12	-88	-23,4°
355	21/12	-89	-23,43°
356	22/12	-89	-23,43°
357	23/12	-88	-23,4°

n_{jj}	date	n_{vjj}	Déclinaison
358	24/12	-87	-23,38°
359	25/12	-86	-23,34°
360	26/12	-85	-23,30°
361	27/12	-84	-23,25°
362	28/12	-83	-23,19°
363	29/12	-82	-23,13°
364	30/12	-81	-23,06°
365	31/12	-80	-22,98°

La figure 3 est la représentation graphique de la formule (2).

graphe($\text{asin}(\sin 0.408) * \sin(x)$), $x = 0..7$)

