

Les points de Lagrange. Approche heuristique.

Thierry Piou président de l'association d'astronomie "Pêcheurs d'étoiles" La Baule.

Introduction

Nous allons aborder l'étude du point de Lagrange L2 selon trois points de vue différents. Nous verrons qu'ils mènent au même résultat puis nous élargirons notre propos aux autres points remarquables. Le formalisme adopté dans ce document s'appuie sur [celui-ci](#)

1 Etude de la dynamique dans un référentiel inertiel.

1.1 Système, référentiel, repère.

Le système est le point matériel P de masse m. Le référentiel inertiel, absolu dans notre formalisme, est représenté par le repère (O, x_1, x_2, x_3) où O est au centre du Soleil et x_1, x_2, x_3 dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes.(figure 1).

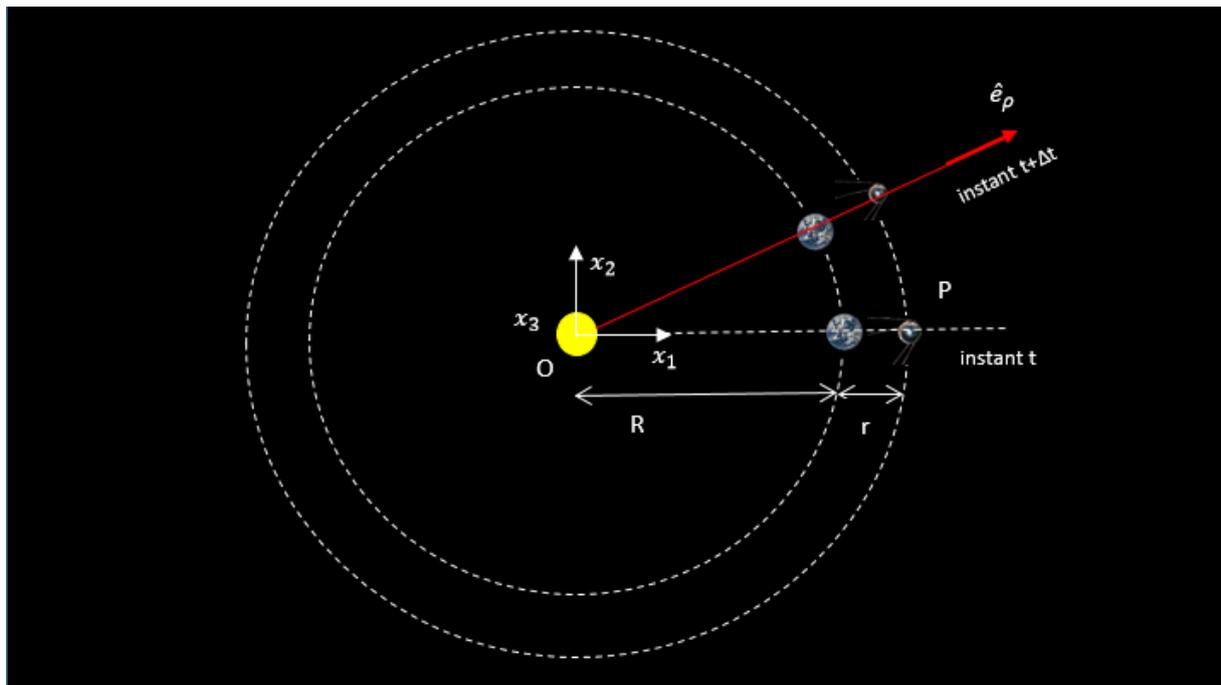


Fig.1

1.2 Contraintes.

Nous considérons que les mouvements de la Terre et du point matériel P sont circulaires uniformes et nous prendrons pour hypothèse que la vitesse angulaire est identique pour les deux objets, c'est-à-dire que $\omega_T = \omega_P$ et que $r \ll R$

1.2 Bilan des forces de contraintes.

Le point matériel est soumis à deux forces de contraintes :

$$\text{Attraction de la Terre} \quad - \frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho \quad (1)$$

$$\text{Attraction du Soleil} \quad - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho \quad (2)$$

où G est la constante de la gravitation universelle, M_T et M_S respectivement les masses du Soleil et de la Terre.

1.2 Dynamique du point matériel P

Reprenons le formalisme que nous avons établi [ici](#) :

:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_a(A) + m\vec{a}_r(P) + 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(P) + m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{AP} + m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{AP}) \quad (3)$$

Or ici, nous sommes en présence d'un référentiel inertiel, l'expression se simplifie donc comme ceci :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_a(A) \quad (3')$$

avec :

$$\sum_i \vec{F}_i = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho \quad (3'')$$

Il nous reste à identifier le second membre de (3'), la trajectoire du point matériel P étant circulaire uniforme par hypothèse, nous avons :

$$-m(R+r)\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho \quad (3^3)$$

où $-m(R+r)\omega^2 \hat{e}_\rho$ est la force centripète exercée sur le point matériel P

Dans l'expression (3³), la masse m disparaît, c'est l'universalité de la chute libre, le vecteur unitaire \hat{e}_ρ disparaît aussi, il vient :

$$-(R+r)\omega^2 = -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_S}{(R+r)^2} \quad (3^4)$$

Nous allons maintenant procéder à une petite transformation algébrique, remarquons que :

$$(R + r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \quad (4)$$

En mettant R^2 en facteur :

$$(R + r)^2 = R^2 \left(1 + 2\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right) = R^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right)^2 \quad (4')$$

L'expression (3⁴) devient :

$$-(R + r)\omega^2 = -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_S}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-2} \quad (3^5)$$

comme $r \ll R$ par hypothèse, nous pouvons procéder à un développement limité au 1^{er} ordre de $\left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-2}$ ce qui nous donne :

$$\left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-2} \approx \left(1 - 2\frac{r}{R} \right) \quad (4'')$$

L'expression (3⁵) devient alors :

$$-(R + r)\omega^2 \approx -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_S}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R} \right) \quad (3^6)$$

Développons le second terme du second membre :

$$-(R + r)\omega^2 \approx -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_S}{R^2} + 2\frac{GM_S r}{R^3} \quad (3^7)$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est de déterminer r en fonction des autres grandeurs. Pour cela nous devons nous débarrasser du terme ω et cela peut se faire en appliquant la deuxième loi de Newton à la Terre dans le référentiel inertiel. On néglige l'accélération de l'objet P sur la Terre, nous avons alors :

$$-R\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_S}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (5)$$

on en déduit :

$$\omega^2 = \frac{GM_S}{R^3} \quad (5')$$

l'expression (3⁷) devient :

$$-(R + r)\frac{GM_S}{R^3} \approx -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_S}{R^2} + 2\frac{GM_S r}{R^3} \quad (3^8)$$

on développe le premier membre de (3⁸)

$$-\frac{GM_s}{R^2} - \frac{GM_s r}{R^3} \approx -\frac{GM_T}{r^2} - \frac{GM_s}{R^2} + 2\frac{GM_s r}{R^3} \quad (3^9)$$

des simplifications sont possibles :

$$-\frac{M_s r}{R^3} \approx 2\frac{M_s r}{R^3} - \frac{M_T}{r^2} \quad (3^{10})$$

soit,

$$-3\frac{M_s r}{R^3} \approx -\frac{M_T}{r^2} \quad (3^{10})$$

finalement on divise les deux membres par -r puis on isole ce dernier dans le premier membre :

$$-3\frac{M_s}{R^3} \approx -\frac{M_T}{r^3} \Rightarrow r^3 \approx \frac{R^3 M_T}{3M_s} \quad (3^{10})$$

finalement :

$$r \approx R \left(\frac{M_T}{3M_s} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3^{11})$$

Application numérique.

$$M_T \approx 6 * 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_s \approx 2 * 10^{30} \text{ kg}$$

$$R = 1UA$$

En conséquence

$$r \approx 1 \left(\frac{6 * 10^{22} \text{ kg}}{3 * 2 * 10^{30} \text{ kg}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 10^{-2} UA \Leftrightarrow 1,5 * 10^6 \text{ km}$$

2 Etude de la dynamique dans un référentiel en translation uniforme autour du Soleil.

2.1 Système, référentiel, repère.

Le système est le point matériel P de masse m. Le référentiel inertiel, absolu dans notre formalisme, est décrit par le repère (O, x_1, x_2, x_3) où O est au centre du Soleil et x_1, x_2, x_3 dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes. Le référentiel relatif est décrit par le repère (A, y_1, y_2, y_3) dont A est au centre de la Terre et y_1, y_2, y_3 respectivement parallèles à x_1, x_2, x_3 .

(figure 2)

2.2 Contraintes.

Vue du référentiel relatif le point matériel P tourne autour de la Terre à la même vitesse angulaire que la Terre autour du Soleil, en conséquence à tout instant nous avons $\omega_T = \omega_P$ par ailleurs, nous avons toujours pour hypothèse $r \ll R$.

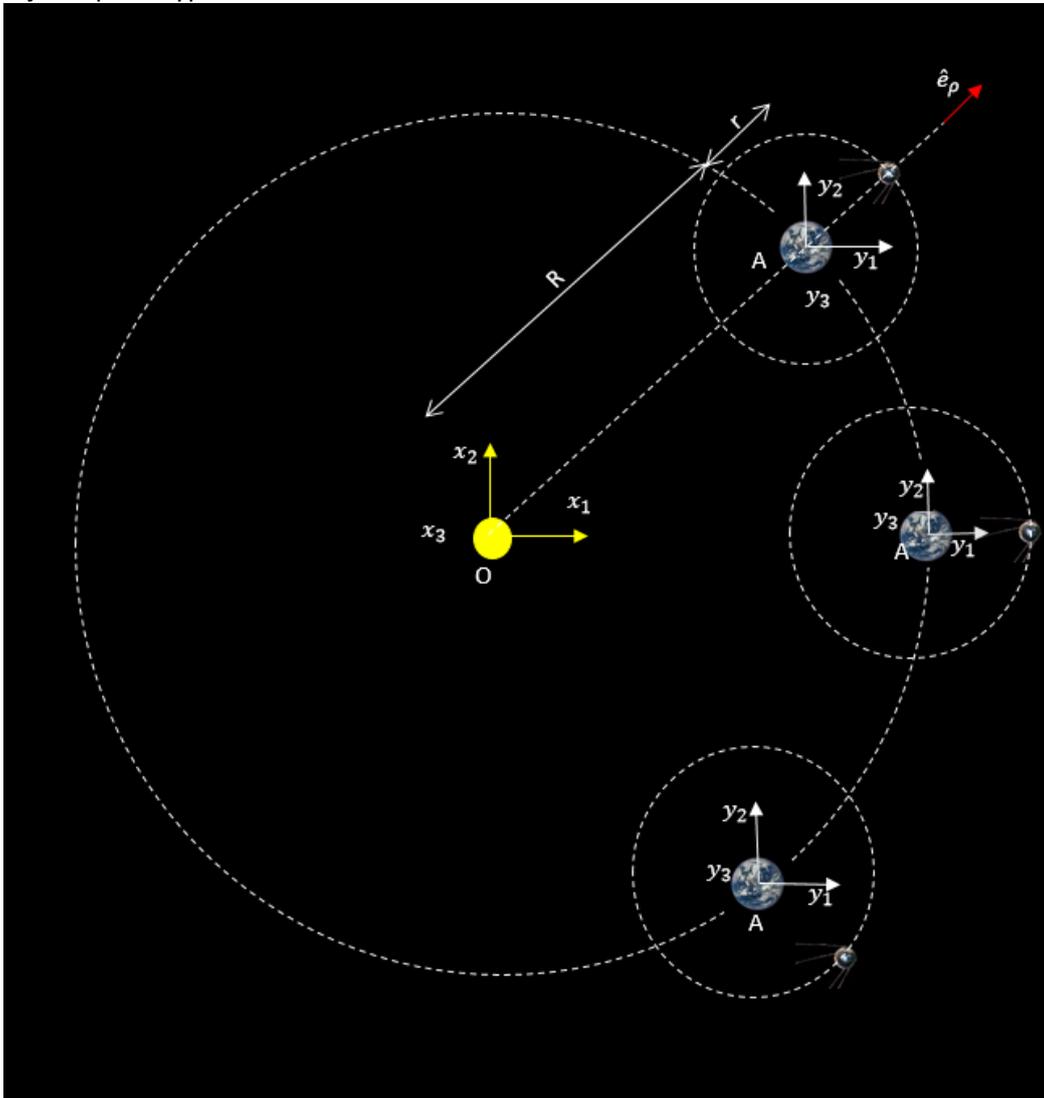


Fig.2

2.3 Bilan des forces contraintes.

Elles restent inchangées par rapport au cas précédent :

$$\text{Attraction de la Terre} \quad - \frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho$$

$$\text{Attraction du Soleil} \quad -\frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho$$

2.4 Dynamique du point matériel P.

On se place du point de vue du référentiel relatif et on utilise le formalisme établi [ici](#) :

$$m\vec{a}_r(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(P) - m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \overline{AP} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP}) \quad (6)$$

Le référentiel relatif n'étant animé d'aucun mouvement de rotation autour de son axe y_3 , l'expression (6) se simplifie et devient :

$$m\vec{a}_r(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) \quad (6')$$

ou encore :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho - m\vec{a}_a(A) \quad (6'')$$

Il nous reste à identifier $m\vec{a}_r(P)$ et $-m\vec{a}_a(A)$. Le point matériel P subit une accélération centripète en direction de la Terre, tandis que le point A subit une accélération de même nature en direction du Soleil, ce qui nous donne :

$$-mr\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + mR\omega^2 \hat{e}_\rho \quad (6^3)$$

Là encore, nous devons nous débarrasser de ω , nous avons vu que :

$$-R\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_S}{R^2} \hat{e}_\rho \Rightarrow \omega^2 = \frac{GM_S}{R^3}$$

l'expression (6³) devient alors :

$$-m \frac{GM_S}{R^3} r \hat{e}_\rho = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + m \frac{GM_S}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (6^4)$$

quelques simplifications s'imposent :

$$-r \frac{M_S}{R^3} = -\frac{M_T}{r^2} - \frac{M_S}{(R+r)^2} + \frac{M_S}{R^2} \quad (6^5)$$

on développe $(R+r)^2$ et on met R^2 en facteur :

$$-r \frac{M_s}{R^3} = -\frac{M_T}{r^2} - \frac{M_s}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right)^{-2} + \frac{M_s}{R^2} \quad (6^6)$$

on procède à un développement limité au 1^{er} ordre :

$$-r \frac{M_s}{R^3} \approx -\frac{M_T}{r^2} - \frac{M_s}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) + \frac{M_s}{R^2} \quad (6^7)$$

on développe :

$$-r \frac{M_s}{R^3} \approx -\frac{M_T}{r^2} - \frac{M_s}{R^2} + 2\frac{M_s r}{R^3} + \frac{M_s}{R^2} \quad (6^8)$$

des simplifications et regroupements sont possibles :

$$-3r \frac{M_s}{R^3} \approx -\frac{M_T}{r^2} \quad (6^9)$$

On divise par $-r$ les deux membres :

$$3 \frac{M_s}{R^3} \approx \frac{M_T}{r^3} \quad (6^{10})$$

$$r^3 \approx R^3 \frac{M_T}{3M_s} \quad (6^{11})$$

soit finalement :

$$r \approx R \left(\frac{M_T}{3M_s}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (6^{12})$$

On retrouve bien le même résultat qu'en (3¹¹).

3 Etude de la dynamique dans un référentiel en rotation centré sur le Soleil.

3.1 Système, référentiel, repère.

Le système est le point matériel P de masse m . Le référentiel inertiel, absolu dans notre formalisme, est décrit par le repère (O, x_1, x_2, x_3) où O est au centre du Soleil et x_1, x_2, x_3 dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes. Le référentiel relatif suit le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil, il est décrit par le repère (A, y_1, y_2, y_3) dont A est confondu avec le point O et y_3 avec x_3 . Le repère (A, y_1, y_2, y_3) est donc animé d'un mouvement de rotation autour de $\hat{x}_3 = \hat{y}_3$ (figure 3)

2.2 Contraintes.

Vue du référentiel relatif le point matériel P tourne autour du Soleil à la même vitesse angulaire

que la Terre, en conséquence à tout instant nous avons $\omega_T = \Omega_P$ par ailleurs, nous avons toujours pour hypothèse $r \ll R$.

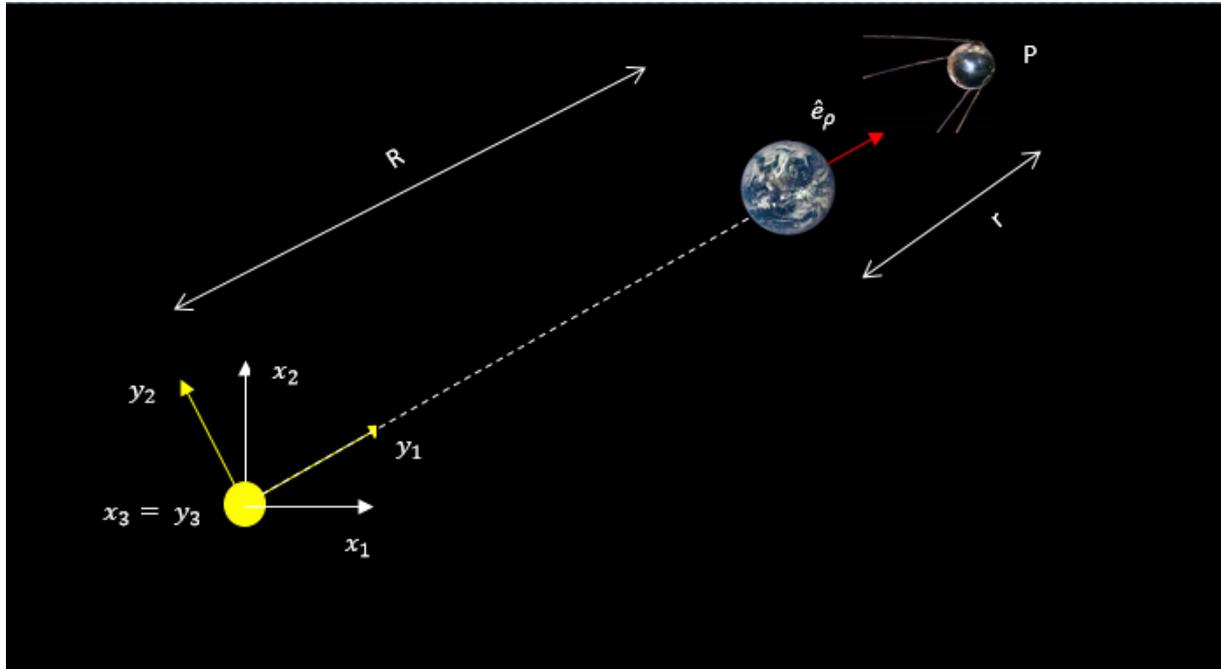


Fig.3

3.3 Bilan des forces contraintes.

Elles restent inchangées par rapport aux cas précédents :

$$\text{Attraction de la Terre} \quad -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho$$

$$\text{Attraction du Soleil} \quad -\frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho$$

2.4 Dynamique du point matériel P.

On se place du point de vue du référentiel relatif et on utilise le formalisme que nous avons vu plus haut :

$$m\vec{a}_r(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(P) - m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \overline{AP} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP}) \quad (7)$$

Il nous faut tenir compte des contraintes du problème :

$m\vec{a}_r(P) = \vec{0}$ car le point P est immobile dans le référentiel relatif.

$m\vec{a}_a(A) = \vec{0}$ car le point A est immobile par rapport au référentiel inertiel.

$-m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \overline{AP} = \vec{0}$ car $\vec{\Omega}$ est constant.

$2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(P) = \vec{0}$ car le point P est immobile dans le référentiel relatif donc $\vec{v}_r(P) = \vec{0}$

La formule (7) devient :

$$\vec{0} = \sum_i \vec{F}_i - \underbrace{m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP})}_{\text{Force centrifuge}} \quad (7')$$

Nous voyons apparaître dans l'expression (7'), qui est l'expression de la dynamique du point matériel P, un terme centrifuge. Notons bien que ce terme n'apparaît que dans le cas d'un référentiel accéléré en rotation et en aucun cas dans le référentiel inertiel.

En tenant compte de $\sum_i \vec{F}_i$, la formule (7') évolue de la manière suivante :

$$\vec{0} = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP}) \quad (7'')$$

or

$$m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP}) = -m(R+r)\Omega^2 \hat{e}_\rho \quad (7^3)$$

Concernant le calcul de $m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP})$, on pourra se référer utilement à [ce document](#). L'expression (7'') devient alors

$$\vec{0} = -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + m(R+r)\Omega^2 \hat{e}_\rho \quad (7^4)$$

on procède au même développement que précédemment :

$$\vec{0} \approx -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho + m(R+r)\Omega^2 \hat{e}_\rho \quad (7^5)$$

développons le dernier terme :

$$\vec{0} \approx -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho + mR\Omega^2 \hat{e}_\rho + mr\Omega^2 \hat{e}_\rho \quad (7^6)$$

nous pouvons mettre $mR\Omega^2$ en facteur :

$$\vec{0} \approx -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho + mR\Omega^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho \quad (7^7)$$

On remplace $R\Omega^2$ par $\frac{GM_S}{R^2}$, il vient :

$$\vec{0} \approx -\frac{GM_T m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_S m}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho + m \frac{GM_S}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho \quad (7^8)$$

On simplifie (7⁸) par mG, il vient :

$$\vec{0} \approx -\frac{M_T}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{M_S}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho + \frac{M_S}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R}\right) \hat{e}_\rho \quad (7^9)$$

On développe les termes entre parenthèse et on regroupe les termes :

$$\vec{0} \approx \left(3 \frac{M_S r}{R^3} - \frac{M_T}{r^2}\right) \hat{e}_\rho \quad (7^{10})$$

de cette expression, nous tirons immédiatement :

$$3 \frac{M_S r}{R^3} \hat{e}_\rho \approx \frac{M_T}{r^2} \hat{e}_\rho \quad (7^{11})$$

soit :

$$r^3 \approx \frac{R^3 M_T}{3M_S} \quad (7^{12})$$

$$r \approx R \left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (7^{13})$$

On retrouve bien le même résultat qu'en (3¹¹) et (6¹²). Celui-ci montre qu'il existe un point au repos dans le référentiel tournant.

4 Les différents points de Lagrange.

Ce point de Lagrange que nous venons d'étudier est dénommé L2, Il existe d'autres points de Lagrange. Par un calcul similaire et en considérant une distance $(R - r)$, on obtient un autre point de Lagrange L1, symétrique au premier par rapport à la Terre (figure 4).

Sur L2, on place plutôt des satellites qui observent l'Univers, tandis que L1 est réservé aux satellites destinés à l'observation du Soleil. Dans un cas comme dans l'autre, ils ne sont pas gênés par la présence de la Terre.

Sur l'axe Soleil-Terre, symétrique à celle-ci par rapport au Soleil, on trouve le point L3 qui présente peu d'intérêt pratique.

Si le Soleil était fixe, nous n'aurions que ces trois points de Lagrange, mais en réalité le Soleil à un mouvement de révolution autour du centre des masses du système solaire. Il y a deux autres points de Lagrange en L4 et L5. Ces deux derniers points forment avec la Terre et le Soleil des triangles équilatéraux.

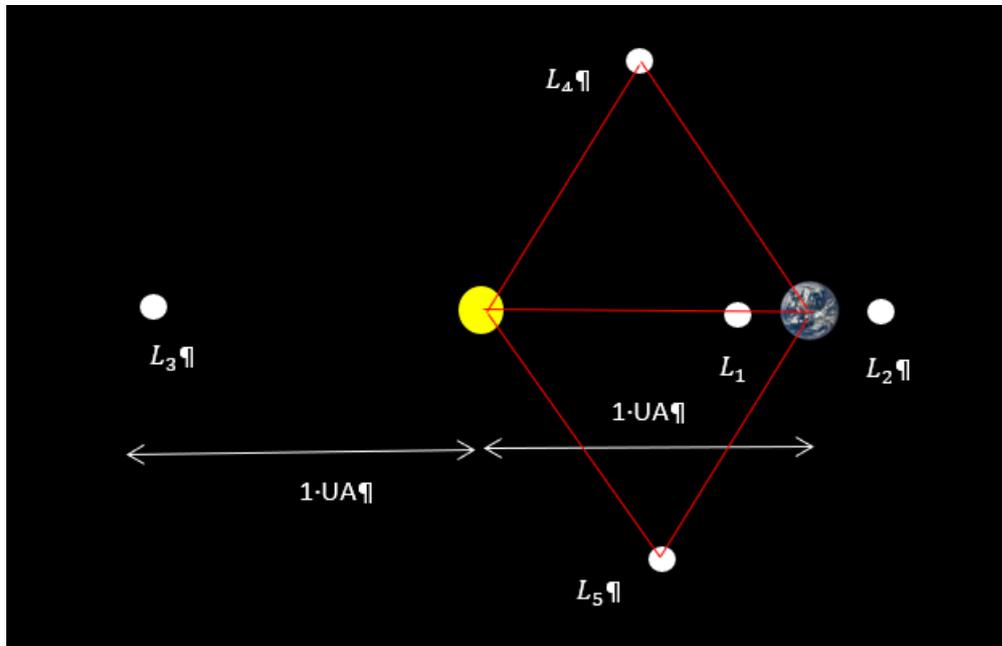


Fig.4

4.1 Stabilité des points de Lagrange.

Nous avons pris pour hypothèse lors de notre étude que la vitesse angulaire du point matériel P est égal à celui de la Terre, or la distance Soleil-point P est supérieure à la distance Soleil-Terre : $R + r > R$

D'après la 3^{ème} loi de Kepler la vitesse angulaire de l'objet P devrait être inférieure à celle de la Terre, c'est-à-dire que le point matériel P devrait être mobile dans le référentiel relatif de la figure 5.

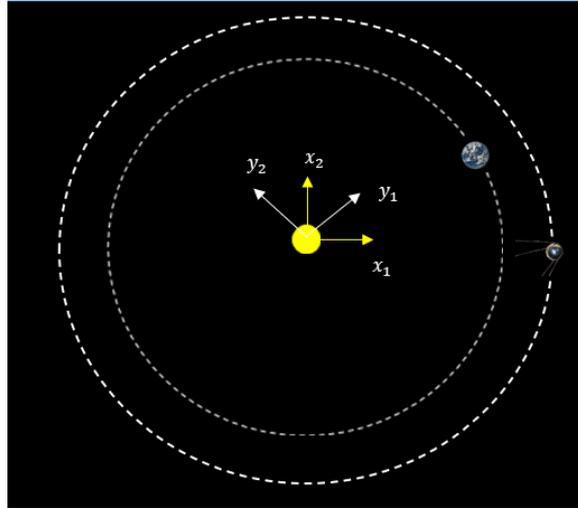


Fig.5

Cependant, l'accélération due à la présence de la Terre permet à l'objet P pour un point précis de l'espace d'avoir une vitesse angulaire plus grande.

Les points L1, L2 et L3 ne sont pas stables : un faible écart par rapport au point considéré et l'objet s'éloigne indéfiniment.

Les points L4 et L5 sont stables, ils sont dénommés points de Lagrange triangulaires ou points troyens. On y trouve des nuages de poussières mais aussi des objets plus massifs, ainsi en janvier 2021, un astéroïde, attiré par ce point attractif, a été découvert en L5.

L'étude de la stabilité des points de Lagrange est complexe et sort du cadre de cette introduction.

Le problème dit "des trois corps" passionnèrent les mathématiciens, mais il faudra attendre Léonard Euler (1707-1787 _ L1, L2, L3) et Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813 _ L4, L5) qui dominent de leurs statures toutes les mathématiques du XVIIIème siècle, pour apporter des éléments de réponse à cette question.



Le télescope spatial James Webb a été injecté au point de Lagrange L2 (vue d'artiste)

Thierry piou.
Mars 2022