Les forces centrales. Coordonnées polaires.

Thierry Piou président de l'association d'astronomie ''Pêcheurs d'étoiles'' La Baule

Introduction.
Les coordonnées polaires sont d'un usage commode lorsqu'on étudie des systèmes dont les forces dépendent de la position du point matériel : module et direction varient en fonction du temps. C'est précisément le cas des systèmes à forces centrales. Ces notions seront fort utiles pour établir ultérieurement les lois des mouvements de Kepler.

1.1 Forces centrales. Définition.

Une force centrale est caractérisée par le fait qu'elle est dirigée vers un seul point.

Une force centrale s'exprime par l'expression :

$$\vec{F} = k\hat{e}_\rho \quad où \quad \|\hat{e}_\rho\| = 1 \qquad (1)$$

$\hat{e}_\rho$ est un vecteur unitaire <u>radial</u>, cela signifie que si on le prolonge, il passe par le point O :

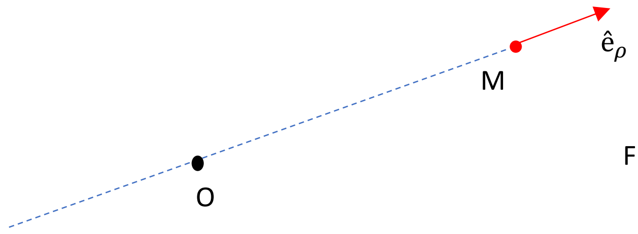

Fig.1

Ce vecteur $\hat{e}_\rho$ est là pour indiquer une direction dans l'espace.

1.2 Le cas de la gravitation.

Complétons le dessin de la figure 1: au point O se situe un objet de masse m_1 et point M un objet de masse m_2 (figure2).

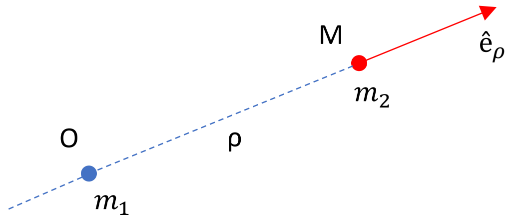

Fig.2

Nous allons considérer l'influence de $m_1$sur m_2. Que vaut le coefficient k de la relation (1) ?
La loi da la gravitation universelle nous indique que :

$$k = -G\frac{m_1 * m_2}{\rho^2} \qquad (2)$$

G est la constante de gravitation universelle, sa valeur fut déterminée en1798 par Cavendish :

$$G = 6{,}67 * 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$$

Le signe ‘’-‘’ devant l’expression (2) indique que la force $\vec{F}$ est de sens opposé à $\hat{e}_\rho$, ce qui s’écrit :

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 * m_2}{\rho^2}\ \hat{e}_\rho \qquad (3)$$

On peut utiliser une autre notation en posant :

$$\hat{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} \qquad (4)$$

Expression que l’on prononce ‘’ vecteur $\vec{\rho}$ sur distance ρ’’ Le vecteur $\vec{\rho}$ est de norme ρ. (figure 3)

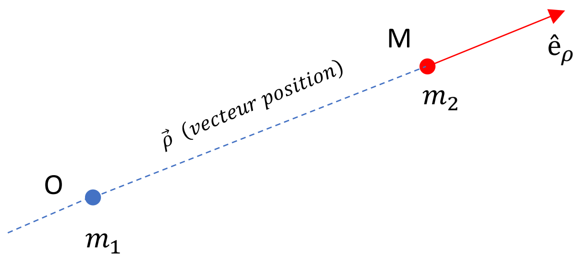

Fig.3

Si on divise $\vec{\rho}$ par sa norme, on obtient un vecteur de norme unité :

$$\left\|\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right\| = 1 = \|\hat{e}_\rho\| \qquad (5)$$

En remplaçant $\hat{e}_\rho$ par $\frac{\vec{\rho}}{\rho}$ dans l’expression de $\vec{F}$, on obtient :

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 * m_2}{\rho^3}\ \vec{\rho} \qquad (6)$$

2.1 Les lignes de coordonnées polaires. Définition.

Pour définir les repères associés à ce système, nous devons définir les lignes de coordonnées polaires. Imaginons que notre référentiel soit matérialisé par un repère cartésien xyz. Supposons que ϕ varie et maintenons ρ et z <u>constants</u>, si z est constant nous sommes dans un plan horizontal à la hauteur z. Dans le cas particulier où z=0, nous nous trouvons dans le plan oxy et c’est ce cas précis qui nous intéresse ici, dans tout ce qui suit nous considérerons que la hauteur z est nulle.

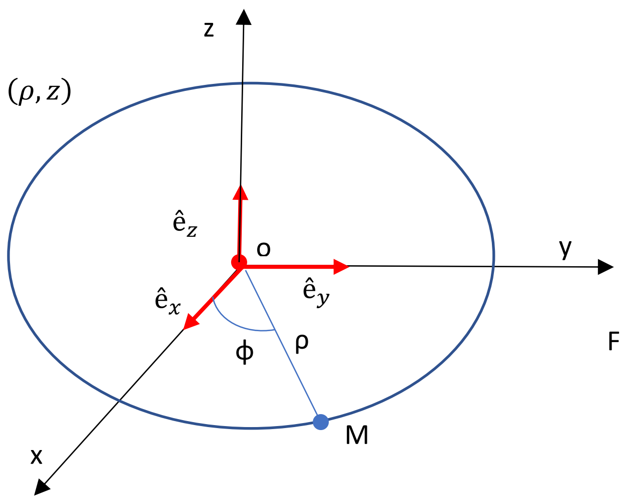

Fig.4

Nous sommes à une distance ρ constante du point O origine du repère cartésien xyz et nous nous situons sur le cercle dessiné à la figure 4. Ce cercle est <u>une ligne de coordonnée</u>.
Si maintenant nous faisons varier ρ avec $\rho = OM$ (figure 5), nous obtenons une autre ligne de coordonnées où z et ϕ sont <u>constants</u> (z=0) et sur laquelle se déplace le point matériel M.

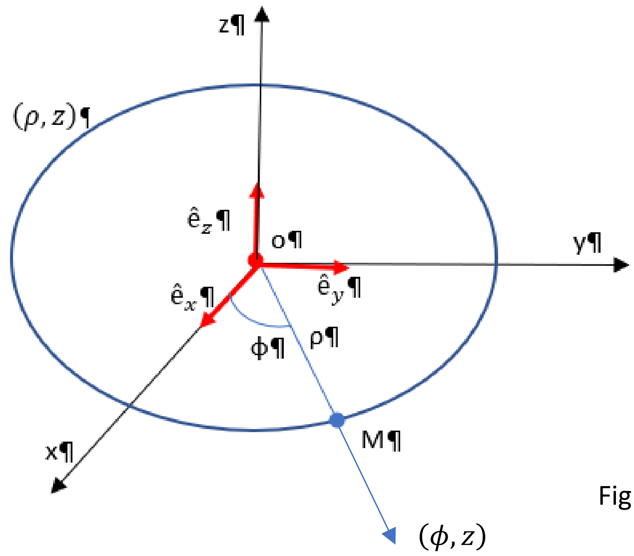

Fig.5

2.2 Repère associé aux coordonnées polaires. Définition.

Nous pouvons définir maintenant le repère associé aux coordonnées polaires. Reprenons la figure 5 qui représente bien la situation : nous avons un référentiel matérialisé par xyz. Les coordonnées (ρ,ϕ) définissent les lignes <u>de coordonnées</u>.
On se propose maintenant de définir des vecteurs unitaires <u>tangents</u> aux lignes de coordonnées. Nous avons un premier vecteur unitaire quand ρ seul varie de même direction que la ligne de coordonnée ρ avec ϕ constant. On nomme ce vecteur unitaire $\hat{e}_\rho$ (figure 6)

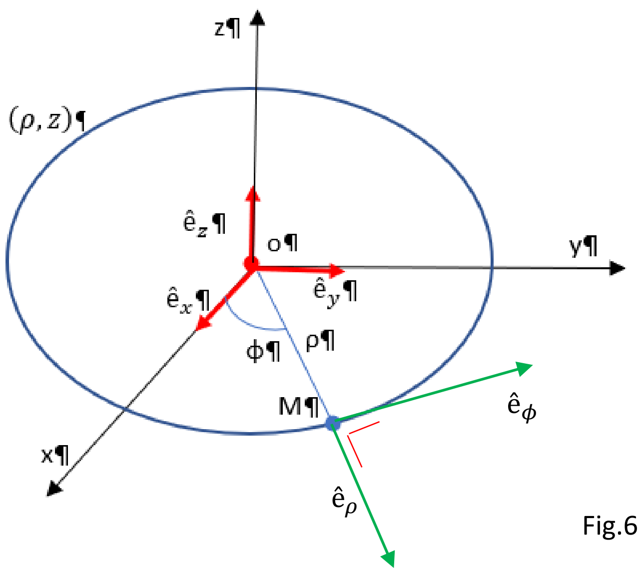

Fig.6

Nous avons un second vecteur unitaire tangent à la ligne de coordonnée correspondante quand seul ϕ varie (figure 6). On nomme ce vecteur $\hat{e}_\phi$. Le sens des vecteurs est dans le sens <u>croissant</u> des coordonnées.
Les vecteurs $\hat{e}_\phi$ et $\hat{e}_\rho$ sont horizontaux et orthogonaux, en effet $\hat{e}_\phi$est tangent au cercle et donc perpendiculaire à $\hat{e}_\rho$. Le produit scalaire des deux vecteurs est donc nul :

$$\hat{e}_\rho * \hat{e}_\phi = 0 \qquad (7)$$

2.3 Coordonnées cartésiennes des vecteurs du repère polaire.

Nous allons maintenant calculer les projections des vecteurs $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ sur les axes cartésiens $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$. Comme tout se passe dans le plan xy, le dessin précédent peut se simplifier de la manière suivante (figure 7) :

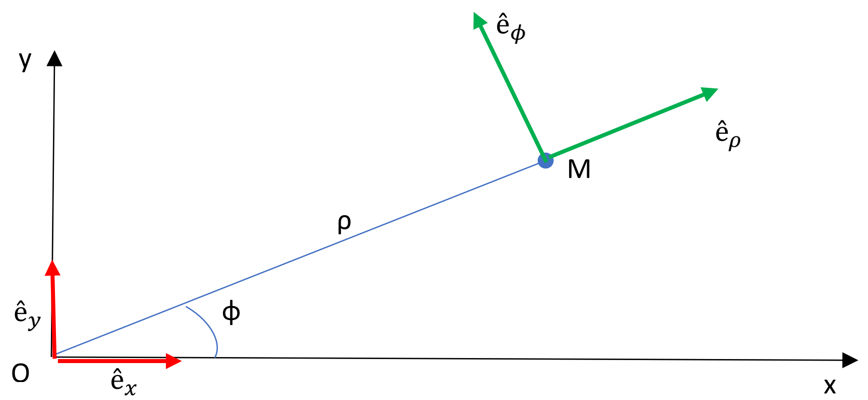

Fig.7

Pour calculer les projections des vecteurs polaires sur le repère cartésien, nous allons utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \|\hat{e}_\rho\|.\|\hat{e}_x\|.\cos\phi \\ \|\hat{e}_\rho\|.\|\hat{e}_y\|.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Soit :

$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\, \hat{e}_x + \sin\phi\, \hat{e}_y \qquad (9)$$

La projection du vecteur $\hat{e}_\phi$sur le repère cartésien semble moins évidente de prime abord, nous pouvons cependant ajouter une construction auxiliaire à la figure 6 en construisant une demi-droite parallèle à la direction du vecteur $\hat{e}_\phi$passant par l'origine O (figure 8).

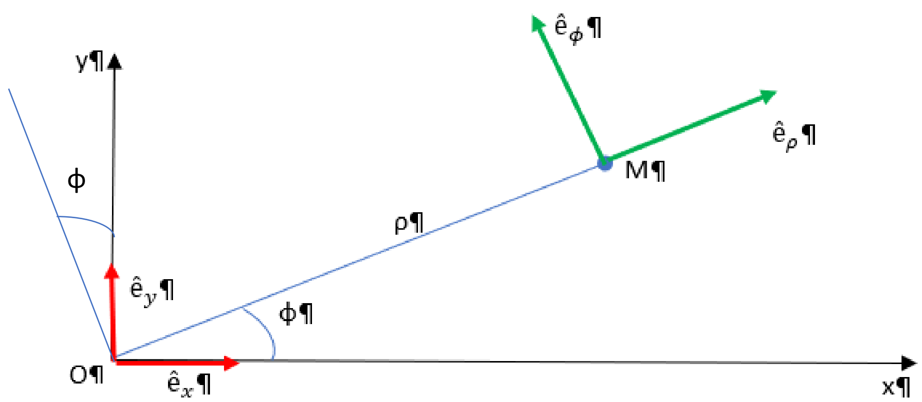

Fig.8

On retrouve l'angle ϕ entre cette demi-droite et l'axe Oy (théorème des angles à côtés perpendiculaires). On en déduit :

$$\hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} \|\hat{e}_\phi\|.\|\hat{e}_x\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) \\ \|\hat{e}_\phi\|.\|\hat{e}_y\|.\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \qquad (10)$$

D'où

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y \qquad (11)$$

On en déduit :

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{d\phi} = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y = \hat{e}_\phi \qquad (12)$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} = -\cos\phi\,\hat{e}_x - \sin\phi\,\hat{e}_y = -\left(\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y\right) = -\hat{e}_\rho \qquad (13)$$

Cette propriété importante s'appelle ''la règle de dérivation par rapport à l'angle polaire'' : elle montre que la dérivée par rapport à l'angle polaire ϕ dans le plan $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un vecteur unitaire û (qui ne dépend que de ϕ) est obtenue par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ de ce vecteur dans le plan.

Nous allons maintenant chercher les dérivées temporelles des vecteurs de base $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ projetés sur le repère cartésien ; dérivées que nous projetterons ensuite sur le repère polaire.
Attention !!!! ne perdons pas de vue que l'angle polaire est une fonction du temps.
Nous avons donc :

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{d\left[\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y\right]}{dt} = -\dot{\phi}\sin\phi\,\hat{e}_x + \dot{\phi}\cos\phi\,\hat{e}_y = \dot{\phi}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \qquad (14)$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = \frac{d\left[-\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y\right]}{dt} = -\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{e}_x - \dot{\phi}\sin\phi\,\hat{e}_y = -\dot{\phi}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} = -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho \qquad (15)$$

Cette seconde propriété importante est ''la règle de dérivation par rapport au temps d'un vecteur û de norme constante''. Elle montre que la dérivée d'un vecteur de norme constante û par rapport au temps est un autre vecteur dont la norme est obtenue en multipliant celle de û par la **vitesse angulaire $\boldsymbol{\dot{\phi} = \omega}$** et qui est obtenue par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur û.

2.4 Expressions de la vitesse et de l'accélération du point matériel dans le repère polaire.

La position du point matériel dans le repère polaire s'exprime par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\hat{e}_\rho \qquad (16)$$

Concernant la vitesse, nous avons donc :

$$\frac{d\left[\overrightarrow{OM}\right]}{dt} = \frac{d\left[\rho\hat{e}_\rho\right]}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \qquad (17)$$

Et pour l'accélération :

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = \frac{d[\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi]}{dt} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\,\frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \quad + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - \rho\dot{\phi}\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho$$

On regroupe les différents termes, il vient :

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \qquad (18)$$

Nous avons donc les expressions de la vitesse (17) et de l'accélération (18) du point matériel en coordonnées polaires et c'est bien, in fine, ce que nous voulions.

2.5 Exemples d'application.

Nous allons voir à travers deux exemples, qui n'ont rien à voir avec l'astronomie mais qui sont explicites et c'est bien cela qui nous importe ici, comment utiliser les relations (17) et (18).

<u>1^er^ exemple.</u>

Un point fixe est relié par une ficelle inextensible de longueur L à un point matériel M de masse m. On anime ce dernier d'une vitesse $\vec{v}_0$ (figure 9)

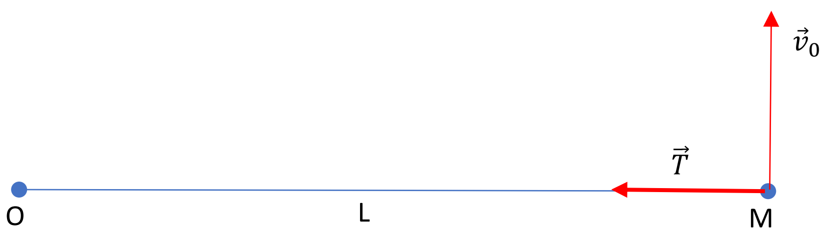

Fig.9

On demande de déterminer la tension T qui s'exerce sur le fil. Le système est vu de dessus et repose sur un plan, on néglige les frottements.

<u>Résolution</u>.

Comme dans tout problème de mécanique, on commence par faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point matériel. Nous avons donc :

- $\vec{P}$ qui est le poids du point matériel M.
- $\vec{R}$ qui est la réaction du support plan sur le point M.
- $\vec{T}$ qui est la tension exercée sur le fil.

Or $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ont la même norme, la même direction mais sont de sens opposés, en conséquence :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Nous allons maintenant utiliser les coordonnées polaires pour résoudre notre problème. Faisons évoluer notre dessin (figure 10).

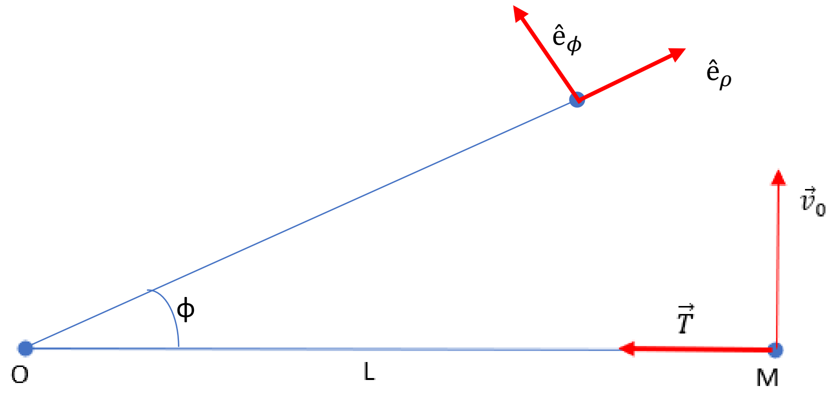

Fig.10

Cela étant fait, exprimons le vecteur $\vec{T}$ dans le système de coordonnées polaires :

$$\vec{T} = -\|\vec{T}\|\hat{e}_\rho \; où\ encore\ en\ allégeant\ l'écriture\ \vec{T} = -T\hat{e}_\rho$$

Nous savons que d'une manière générale, la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{T}$$

Soit en reprenant l'expression (18) du vecteur accélération :

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + m\,(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi = -T\hat{e}_\rho$$

Adaptons cette expression à notre problème, nous avons l'identité $L = \rho$, par ailleurs L est constante par hypothèse. La relation fondamentale se simplifie donc de la manière suivante :

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + m\,L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi = -T\hat{e}_\rho$$

Or ce que nous aimerions connaître, c'est l'évolution de l'angle ϕ en fonction du temps, cette information permettra de résoudre notre problème.
Identifions membre à membre les termes de la relation fondamentale de la dynamique :

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho = -T\hat{e}_\rho \;=>\; mL\dot{\phi}^2 = T$$

et

$$m\,L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi = \vec{0} \;=>\; L\ddot{\phi} = 0$$

Considérons l'équation $L\ddot{\phi} = 0$ et intégrons-là, nous obtenons :

$$L\dot{\phi} = cst \;=>\; \dot{\phi} = cst$$

La variation de l'angle polaire par rapport au temps est donc constante, nous écrirons :

$$\omega = \dot{\phi} = cst$$

ω n'est rien d'autre que la vitesse angulaire du repère polaire dans le plan. Nous pouvons donc écrire :

$$L\dot{\phi} = L\omega$$

Intéressons-nous maintenant à la vitesse du point matériel, nous avons vu que la vitesse dans le repère polaire s'exprimait par la relation :

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

Or ici $\rho = L = cst$ par hypothèse donc $\dot{\rho} = 0$. Comme pour l'accélération, l'expression de la vitesse se simplifie. Nous obtenons :

$$\vec{v} = v\hat{e}_\phi = L\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

En tenant compte des hypothèses de notre problème, nous avons :

$$v_0 = L\dot{\phi} = L\omega \;=>\; \omega = \frac{v_0}{L}$$

Il est intéressant à ce stade de faire une analyse dimensionnelle de vitesse angulaire ω :

$$[w] = L\,T^{-1}L^{-1} = \;T^{-1}$$

Où L est la longueur et T le temps, la pulsation s'exprime donc en s^{-1}.
Nous avons maintenant ce qu'il nous faut pour rechercher l'expression de la tension sur le fil. Nous avons vu plus haut que

$$mL\dot{\phi}^2 = T$$

Or $\dot{\phi} = \omega = \frac{v_0}{L}$

Nous remplaçons $\dot{\phi}$ par son expression équivalente $\frac{v_0}{L}$:

$$mL\frac{{v_0}^2}{L^2} = T$$

Soit finalement le résultat recherché :

$$\boxed{T = m\frac{{v_0}^2}{L}}$$

2ème exemple. Le pendule simple.
Le pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre M d'un fil inextensible de longueur L (l'autre extrémité O du fil étant fixe par rapport à la Terre).
On se propose ici de rechercher l'équation décrivant le mouvement de la masse. (figure 11)
Résolution
Commençons comme dans l'exemple précédent par faire le bilan des forces agissant sur la masse.
Nous avons :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- La tension $\vec{T}$ du fil inextensible.

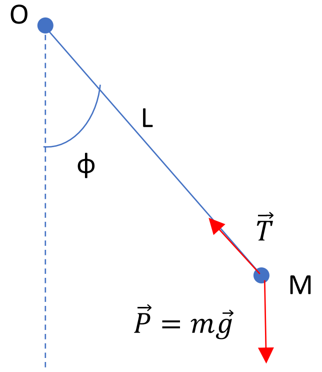

Fig.11

Il convient dans un premier temps de déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{T}$ *et* $\vec{P}$ dans un système de coordonnées polaires. Faisons évoluer notre dessin (figure 12) :

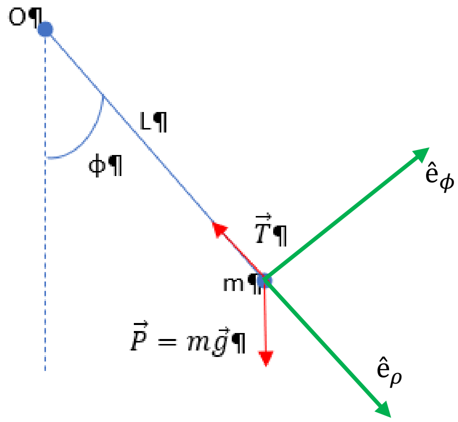

Fig.12

Projetons le vecteur $\vec{T}$ sur le système de coordonnées polaires, nous obtenons :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \|\hat{e}_\rho\|.\|\vec{T}\|.\cos\pi \\ \|\hat{e}_\phi\|.\|\vec{T}\|.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

Faisons de même pour le vecteur $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \|\hat{e}_\rho\|.\|\vec{P}\|.\cos\phi \\ \|\hat{e}_\phi\|.\|\vec{P}\|.\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\phi \\ -mg\sin\phi \end{pmatrix}$$

Nous appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Nous avons vu plus haut que dans le système de coordonnées polaires l'accélération est donnée par la relation suivante :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi$$

Dans notre exemple, nous avons $\rho = L = cst$, l'expression de l'accélération se simplifie de la manière suivante :

$$\vec{a} = -L\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + m\,L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi = -T\hat{e}_\rho + mg\cos\phi\,\hat{e}_\rho - mg\sin\phi\;\hat{e}_\phi$$

On regroupe les différents termes du second membre de cette équation vectorielle, puis nous procéderons à une identification terme à terme, allons-y :

$$-mL\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + m\,L\ddot{\phi}\hat{e}_\phi = (-T + mg\cos\phi)\hat{e}_\rho - mg\sin\phi\;\hat{e}_\phi$$

Identifions les termes selon $\hat{e}_\phi$:

$$m\,L\ddot{\phi} = -mg\sin\phi$$

On obtient immédiatement l'équation du mouvement :

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0$$

En procédant à un développement limité au premier ordre de $\sin\phi$, on obtient :

$$\sin\phi \approx \phi$$ [1]

L'équation du mouvement est donc :

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\phi = 0}$$

qui est celui de *l'oscillateur harmonique*. On voit que la pesanteur g intervient dans cette expression. Le pendule simple est utilisé en gravimétrie, il permet de mesurer les variations locales du champ de pesanteur.

Identifions maintenant les termes selon $\hat{e}_\rho$, nous avons :

$$-mL\dot{\phi}^2 = -T + mg\cos\phi$$

Soit :

$$\boxed{T = m\left(L\dot{\phi}^2 + g\cos\phi\right)}$$

En résumé, l'expression selon $\hat{e}_\phi$nous indique la nature du mouvement du pendule tandis que l'expression selon $\hat{e}_\rho$nous informe sur l'évolution de la tension du fil inextensible.

[1] Pour un angle ϕ de 10° l'erreur relative entre sin ϕ et ϕ est de 0,5%. L'expression de l'oscillateur harmonique n'est valable que pour des angles de faibles valeurs.

2.6 Mouvement circulaire uniforme. Vecteur rotation.

Définition du vecteur rotation

Considérons le point matériel M animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe z (figure 13)

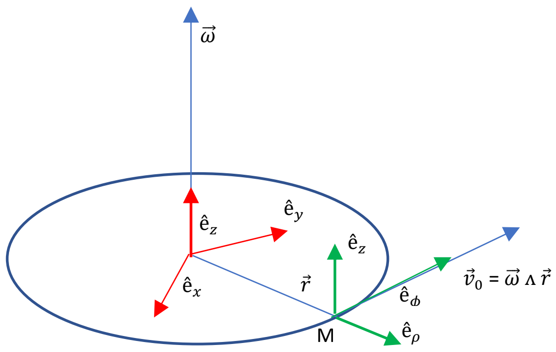

Fig.13

Nous avons vu plus haut que :

$$\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y \qquad (9)$$
$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y \qquad (11)$$

Et que

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \qquad (14)$$

$$\frac{d\hat{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho \qquad (15)$$

Nous pouvons ajouter que le vecteur $\hat{e}_z$ est constant par rapport au temps, c'est-à-dire qu'il ne varie ni en norme, ni en direction, ni en sens par rapport au temps. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{d_{\hat{e}_z}}{dt} = \vec{0} \qquad (16)$$

Le vecteur rotation ou vecteur vitesse angulaire se note :

$$\vec{\omega} = \frac{d_\phi}{dt}\hat{e}_z = \dot{\phi}\hat{e}_z \qquad (17)$$

La norme du vecteur rotation n'est rien d'autre que la vitesse angulaire scalaire du rayon vecteur r

$$\omega = \dot{\phi} \qquad (18)$$

Les formules de Poisson

Nous pouvons maintenant écrire l'expression (14) de manière toute différente en utilisant notre vecteur rotation :

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \qquad (19)$$

Pour trouver ce résultat, nous pouvons soit utiliser la règle de la main droite, soit remarquer l'ordre des indices (permutation circulaire) :

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\phi &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\rho &= \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\phi \wedge \hat{e}_z &= \hat{e}_\rho \end{aligned} \qquad (20)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho \\ \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi \\ \frac{d\hat{e}_z}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z \end{aligned} \qquad (21)$$

Nous pouvons aisément vérifier ces résultats en posant les produits vectoriels sous forme de déterminant :

$$\vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle\vec{\omega} & \scriptstyle\hat{e}_\rho \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & 0 & 1 \\ \hat{e}_\phi & 0 & 0 \\ \hat{e}_z & \omega & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 0\,\hat{e}_\rho - \left(-\omega\,\hat{e}_\phi\right) + 0\,\hat{e}_z = \omega\,\hat{e}_\phi = \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{\omega} \wedge \hat{e}_\phi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle\vec{\omega} & \scriptstyle\hat{e}_\phi \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & 0 & 0 \\ \hat{e}_\phi & 0 & 1 \\ \hat{e}_z & \omega & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -\,\omega\,\hat{e}_\rho - \left(0\,\hat{e}_\phi\right) + 0\,\hat{e}_z = -\omega\,\hat{e}_\rho = -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{\omega} \wedge \hat{e}_z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \scriptstyle\vec{\omega} & \scriptstyle\hat{e}_z \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & 0 & 0 \\ \hat{e}_\phi & 0 & 0 \\ \hat{e}_z & \omega & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 0\,\hat{e}_\rho - \left(0\,\hat{e}_\phi\right) + 0\,\hat{e}_z = \omega\,\hat{e}_\phi = \vec{0}$$

Maintenant, la formule (19) nous indique que la vitesse d'un point matériel animé d'un mouvement circulaire uniforme s'exprime par la relation

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (22)$$

Vu la propriété du produit vectoriel, $\vec{v}_0$ est perpendiculaire au plan contenant $\vec{\omega}$ et $\vec{r}$.
Nous pouvons maintenant calculer l'accélération, la dérivée de la vitesse par rapport au temps nous donne l'expression :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \qquad (23)$$

en conséquence,

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=\,\vec{0}} \wedge\, \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (23')$$

N'oublions pas en effet que $\vec{\omega}$ est constant, il vient :

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Or $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, soit:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \qquad (24)$$

Par inspection de la figure 13 et en appliquant la règle de la main droite , on obtient un vecteur accélération (figure 14).

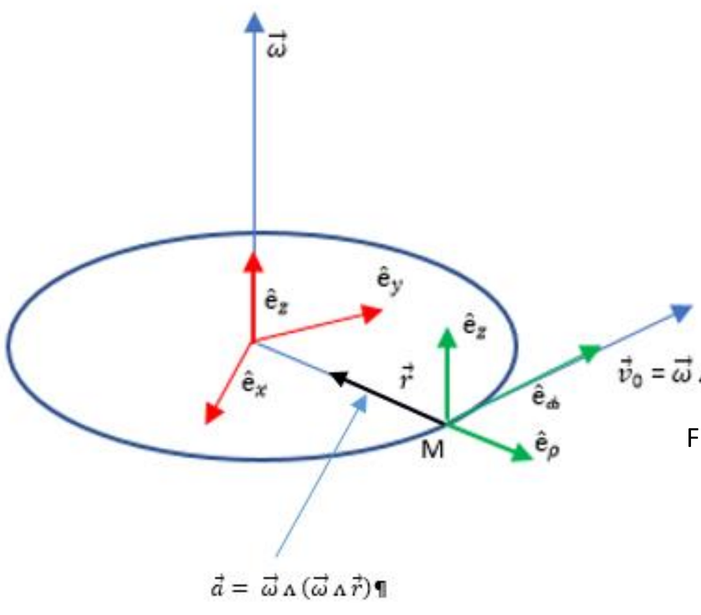

Fig.14

Le sens du vecteur accélération $\vec{a}$ est opposé à $\vec{r}$, c'est <u>l'accélération centripète</u> pour le mouvement circulaire uniforme.

Nous avons donc ici deux expressions très élégantes de la vitesse et de l'accélération centripète pour le mouvement circulaire uniforme.

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (22)$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (24)$$

Calculons ces produits vectoriels en posant les déterminants correspondants :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \vec{\omega} & \vec{r} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & 0 & r \\ \hat{e}_\phi & 0 & 0 \\ \hat{e}_z & \omega & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 0\ \hat{e}_\rho - (-\omega r)\ \hat{e}_\phi + 0\ \hat{e}_z = \ r\omega\ \hat{e}_\phi$$

de même :

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \vec{\omega} & rw\hat{e}_\phi \end{array} \\ \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & 0 & 0 \\ \hat{e}_\phi & 0 & r\omega \\ \hat{e}_z & \omega & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -r\omega^2\ \hat{e}_\rho + 0\ \hat{e}_\phi + 0\ \hat{e}_z$$

Finalement :

$$\vec{v}_0 = r\omega\ \hat{e}_\phi \qquad (25)$$

$$\vec{a} = -r\omega^2\ \hat{e}_\rho \qquad (26)$$

Le signe moins de l'expression (26) nous indique que l'accélération est bien dans le sens opposé au vecteur $\hat{e}_\rho$.
Nous pouvons retrouver les mêmes résultats à partir des expressions (17) et (18), réécrivons-les pour plus de commodités :

$$\frac{d[\overrightarrow{OM}]}{dt} = \frac{d[\rho\hat{e}_\rho]}{dt} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\ \hat{e}_\phi \qquad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\ \overrightarrow{OM} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \qquad (18)$$

Il nous faut maintenant tenir compte des contraintes liées au mouvement circulaire uniforme :

- $\rho = r = cst => \dot{\rho} = 0\ et\ \ddot{\rho} = 0$
- $\dot{\phi} = \omega = cst => \ddot{\phi} = 0$

En procédant aux substitutions, on retrouve bien les expressions (25 et (26), les vitesse et accélération scalaires sont :

$$v_0 = r\omega \quad (25')$$

$$a = r\omega^2 \quad (26')$$

Avril 2020, modifié en janvier 2022
Thierry Piou.