Les aviateurs perdus (1ère partie)

Avant – propos

La cosmographie, c'est-à-dire la description de l'Univers au sens étymologique, enseignée au lycée jusque dans les années 1960, est tombée en désuétude.

La cosmographie d'aujourd'hui, pour ceux qui s'y intéressent, fait une large place à l'astrophysique au détriment de l'astronomie de position, qui constitue cependant le socle de cette science. La description de la sphère céleste et des différents systèmes de coordonnées servant au repérage des astres, l'étude du mouvement de ces derniers sont autant d'éléments à connaître pour celui qui veut comprendre les différents phénomènes qui affectent notre vie quotidienne comme les éclipses, les saisons, ou les marées. Il y a encore moins de trente ans, ces connaissances étaient d'ailleurs indispensables pour quiconque souhaitait se repérer sur la Terre.

La composition des mouvements de la Terre rend difficile pour le débutant la compréhension des différents phénomènes astronomiques que nous pouvons observer. Pour cette raison, nous avons trouvé amusant d'introduire certains concepts fondamentaux à travers un problème ludique publié il y a déjà fort longtemps par la Société Astronomique de France.

1. Le concours de la Société Astronomique de France.

Voici ce nous pouvions lire dans le bulletin de janvier 1940[1] de la SAF :

> ''Un concours est ouvert entre tous les membres de la Société pour la résolution du problème suivant :
> Des aviateurs annoncent au moyen d'un poste T.S.F. qu'ils sont perdus dans le désert, où ils ont été contraints d'atterrir.
> On se propose de leur demander par radio de faire certaines mesures, qu'on leur indique, relative aux astres (Soleil, Lune, Etoiles), d'où l'on puisse déduire leur position, qui leur sera envoyé par T.S.F.
> Quelles sont les questions les plus simples à poser à ces aviateurs égarés ?
> Quelles sont les instructions à leur donner pour les aider à se repérer ?
> Comment compte-t-on utiliser les réponses qu'ils feront, afin de trouver le plus rapidement possible leur emplacement ?
> Bien entendu, sauf une montre ordinaire, les aviateurs n'ont emporté aucun instrument, ni aucune Table, ni carte du ciel. Ils ne connaissent rien à l'astronomie, pas même les principales étoiles, ni les planètes : en un mot, ils ne sont pas membres de la Société Astronomique de France.
> Les mémoires seront examinés par une Commission qui jugera de la simplicité et de la généralité des moyens mis en œuvre, de l'efficacité des solutions proposées et en extraira un Guide de l'Aviateur perdu, et …retrouvé, grâce aux membres de la Société Astronomique de France, guide dans lequel sera évidemment laissé à chacun la paternité des idées heureuses qu'il aura données.
> La Commission espère intéresser les personnalités de l'Aéronautique à l'attribution de prix aux meilleurs Mémoires envoyés.
>
> Les Mémoires devront être adressés à Mme Camille Flammarion, Observatoire de Juvisy (Seine et Oise) avant le 31 mai 1940.''

Définir la position des aviateurs revient à déterminer la latitude et la longitude correspondant à cette position. Cependant, avant de résoudre ce problème, nous allons aborder dans cette 1ère partie quelques concepts élémentaires d'astronomie de position dont celui de repère local.
Dans ce document nous supposerons connus du lecteur les notions de longitude et de latitude et afin de ne pas trop alourdir le texte nous nous limiterons à l'hémisphère Nord.
Le Soleil étant l'astre le plus facile à identifier dans le ciel, il est naturel de se tourner vers celui-ci pour déterminer la position de nos aviateurs.

2. Mouvements apparents du système Terre –Soleil.

2.1 Les deux mouvements de la Terre.

La Terre est affectée de deux mouvements principaux : elle tourne sur elle- même autour de l'axe des pôles en 23h56 mn. En un point quelconque de l'hémisphère Nord, choisi en dehors du pôle et de l'équateur, un observateur qui regarde les étoiles équatoriales est tourné vers le Sud ; il voit donc les étoiles se déplacer de sa gauche vers sa droite. L'axe des pôles garde une direction fixe, le pôle Nord pointant vers l'étoile alpha de la petite Ourse. Pour cette raison, cette étoile est aussi dénommée étoile Polaire ou Polaris.

La Terre a aussi un mouvement de révolution autour du Soleil, la droite passant par les centres de la Terre et du Soleil est contenu dans un plan appelé plan de l'écliptique. L'orbite décrite par notre planète est une ellipse de très faible excentricité. Pour un observateur situé au-dessus du pôle Nord,

[1] La France est en état de guerre contre l'Allemagne depuis le 3 septembre 1939.

elle décrit cette ellipse en tournant dans le sens positif en 365,25 jours. Le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur terrestre ne sont pas confondus, ce qui signifie que l'axe des pôles n'est pas perpendiculaire au plan de l'écliptique ; il fait un angle de 23,4° par rapport à la perpendiculaire à ce plan. (Figure 1).

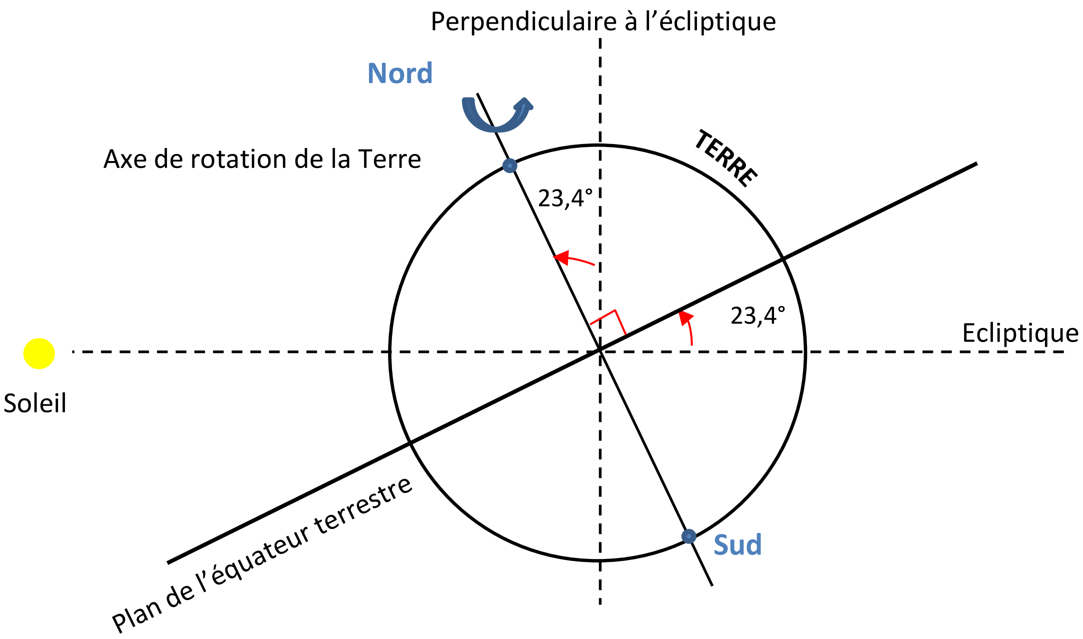


Fig.1

La révolution de la Terre autour du Soleil explique la succession des saisons, la cause en est l'inclinaison de l'axe des pôles par rapport au plan de l'écliptique comme l'illustre la figure 2.

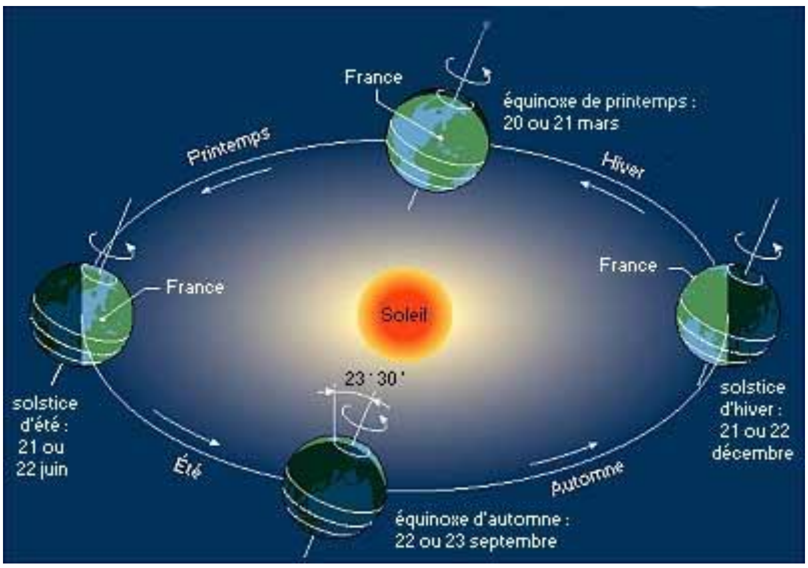


Fig.2

La rotation de la Terre sur elle-même, ainsi que son mouvement de révolution autour du Soleil nous semblent aujourd'hui des explications naturelles face aux phénomènes que nous observons. Il a fallu cependant des siècles avant de dégager ces concepts qui furent l'objet d'âpres controverses et attendre les travaux du chanoine Nicolas Copernic au 16ème siècle avant que l'héliocentrisme ne s'impose peu à peu.


Nicolas Copernic (1473 – 1543) prôna l'héliocentrisme

La rotation de la Terre explique le mouvement apparent du Soleil et de la Lune mais aussi celui des étoiles dans le ciel nocturne, si bien qu'un observateur pensera naturellement que l'Univers tourne autour d'une sphère dont il est le centre. Voyons tout ceci d'un peu plus près.

2.2 Repère local et coordonnées horizontales _ sphère locale

Si notre observateur souhaite déterminer la position d'un astre dans le ciel par rapport à lui-même, il lui faut tout d'abord définir un repère : comment va-t-il procéder ? Il va se munir d'un simple fil à plomb qui, dans sa position d'équilibre, lui indique la verticale du lieu. Cette verticale est perpendiculaire au plan sur lequel il se situe et que l'on dénomme plan horizontal, notons que l'horizon est délimité par la courbure de la Terre.
Dans la direction verticale, au-dessus de la tête de notre observateur, se trouve le zénith. Le point diamétralement opposé au zénith se nomme le nadir. Une observation attentive du ciel nocturne montre que les constellations tournent autour de l'étoile alpha de la Petite Ourse, mettant ainsi en évidence le mouvement diurne autour du pôle céleste Nord (Figure 3).


Mouvement diurne autour du pôle céleste Nord

Fig.3

La direction du pôle céleste Nord est représentée par le point P, fixe sur la sphère.
Le diamètre PP' est la ligne des pôles, encore appelé axe du monde (figure 4).
Le plan qui contient la verticale du lieu (ligne pointillée sur la figure 4) et l'axe du monde est le méridien du lieu. L'intersection de ce plan avec le plan horizontal définit la direction Nord-Sud de ce dernier, la direction Est-Ouest est perpendiculaire à la direction Nord-Sud. Le méridien du lieu est donc le grand cercle qui passe par le point cardinal Nord, le pôle céleste Nord, le zénith et le point

cardinal Sud. C'est au méridien que les astres culminent, soit vers le Sud soit vers le Nord, on parlera de culmination supérieure si celle-ci s'effectue entre le pôle céleste Nord et le zénith et de culmination inférieure si celle-ci a lieu entre le pôle céleste Nord et le Nord géographique (Figure 5).

2.2.1 La hauteur.

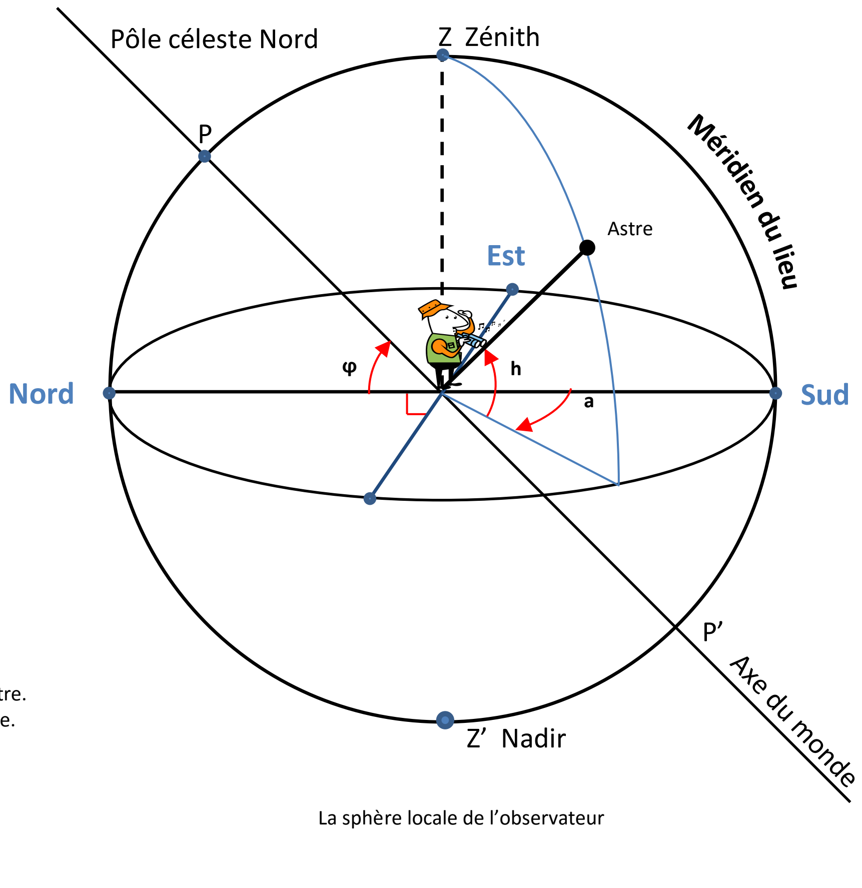
La hauteur est un angle vertical. La hauteur d'un objet céleste est la distance angulaire entre le plan horizontal et cet objet. Si l'astre est à l'horizon sa hauteur est de 0°.Elle vaut 90° si l'astre est au Zénith.

2.2.2 L'azimut

L'azimut est un angle horizontal. L'azimut d'un objet céleste est la distance angulaire entre une direction de référence et cet objet. La direction de référence est le Sud géographique qui vaut 0°.C'est la convention retenue par les astronomes car elle facilite grandement les calculs de positionnement. L'azimut est compté positivement du Sud vers l'Ouest de 0 à 180°, et négativement du Sud vers l'Est., de 0°à – 180°.L'azimut du point cardinal Ouest vaut +90°, l'azimut du point vertical Est vaut -90°.

Le premier vertical est le plan passant par le point Est, le zénith et le point Ouest Le premier vertical est perpendiculaire au plan contenant le méridien du lieu.

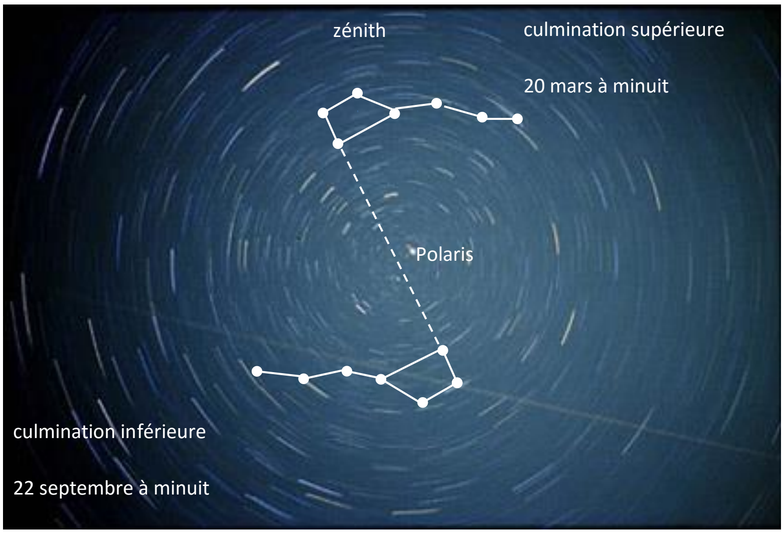
Dans cette sphère céleste locale, seule la direction du pôle céleste est indépendante du lieu d'observation. En revanche, si l'on se déplace en latitude, la distance pôle-zénith change ce qui induit automatiquement un changement de la hauteur de l'astre comme on l'établira un peu plus loin.



φ : latitude du lieu
h : hauteur de l'astre.
a : azimut de l'astre.

Fig.4

La sphère locale de l'observateur



La Grande Ourse respectivement le 20mars et le 22 septembre à 0h

Fig.5

2.3 Trajectoire apparente du Soleil _ déclinaison.

La figure 6 représente l'écliptique tracé sur la sphère céleste (et non sur la sphère locale ; le mouvement décrit ici est <u>indépendant</u> du mouvement diurne).

Les points d'intersection ϒ et ϒ' de l'écliptique et de l'équateur sont appelés les <u>nœuds de l'écliptique</u>. On distingue le nœud ascendant ϒ où le Soleil passe le 20 mars lorsqu'il quitte l'hémisphère austral pour entrer dans l'hémisphère boréal ; et le nœud descendant ϒ', où le Soleil passe le 23 septembre, en rentrant dans l'hémisphère austral.

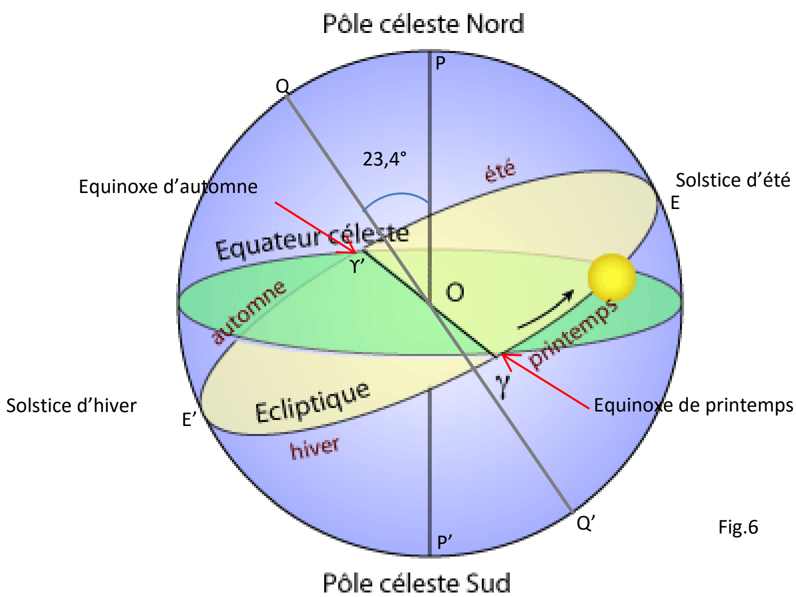


Fig.6

L'obliquité de l'écliptique sur l'équateur est l'angle que font les normales PP' et QQ' à ces deux plans. L'obliquité est actuellement de 23,4°.Les points remarquables de l'écliptique sont outre ses nœuds γ et γ', appelés aussi équinoxes, les point E et E' situés sur le diamètre perpendiculaire à la ligne des nœuds ; ce sont les solstices.

Nous remarquons que pendant la période de l'année correspondant à l'arc γγ' le Soleil est ''au-dessus '' de l'équateur céleste, tandis qu'il se situe ''au-dessous '' de l'équateur lors du parcours de l'arc γ'γ.
A partir de ce constat, il est possible d'introduire un modèle simple permettant de décrire l'évolution de la déclinaison du Soleil à partir de quelques dates clés.
A l'équinoxe de printemps le Soleil se situe au point γ, c'est-à-dire dans le plan de l'équateur céleste (fig.7). Au printemps, la déclinaison du Soleil est <u>boréale et croissante</u> : le Soleil se dirige vers le point E (fig.6)

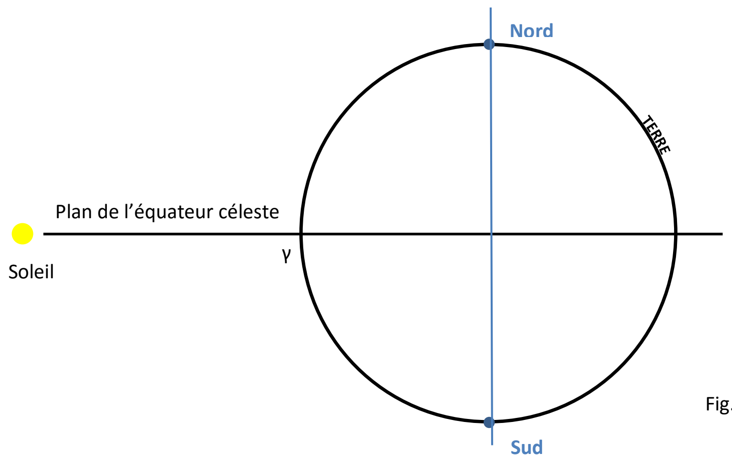


Fig.7

L'été commence le 21 juin, lorsque le Soleil atteint en E le solstice d'été. La configuration est alors celle-ci. (fig.8).

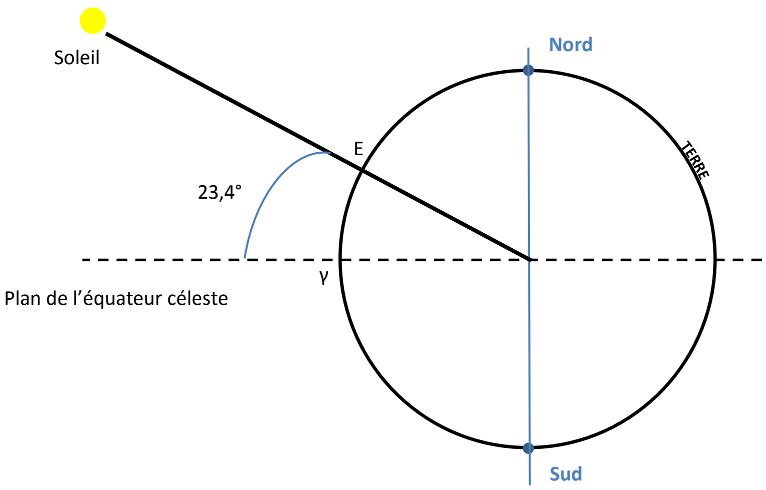


Fig.8

En été la déclinaison reste boréale mais elle est <u>décroissante</u>. Le Soleil se dirige vers le point γ' (fig.6).
L'automne commence le 23 septembre, le Soleil est alors en γ' et la configuration est celle de la figure 9 :

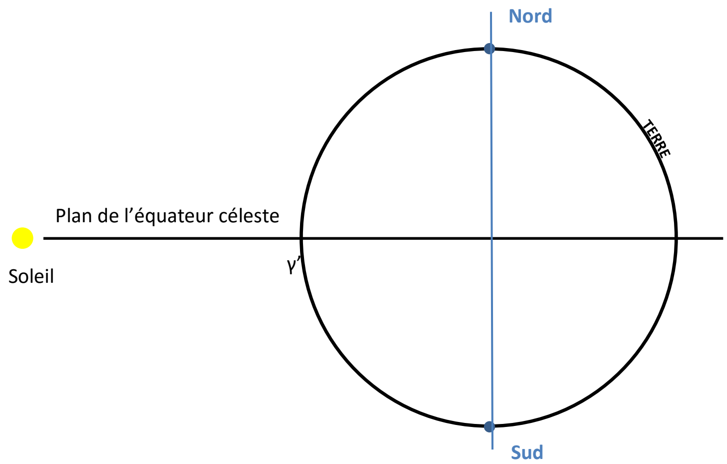


Fig.9

C'est l'équinoxe d'automne, pendant l'automne la déclinaison du Soleil est <u>australe et décroissante</u> en valeur algébrique. Le Soleil se dirige vers le point E' (fig.6).

L'hiver commence le 21 décembre, quand le Soleil atteint le solstice d'hiver en E', la configuration est alors la suivante (fig.10). La déclinaison est australe et croissante. Le Soleil se dirige vers l'équinoxe de printemps.

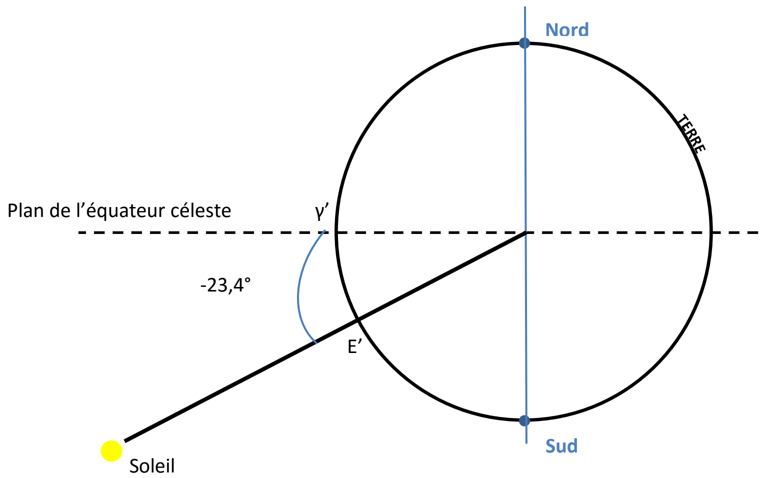


Fig.10

2.4 La hauteur de la Polaire.

On peut montrer facilement à l'aide de la figure 11 que la hauteur de l'étoile Polaire est égale à la latitude du lieu d'observation. Soit O la position d'un observateur dans l'hémisphère Nord dont la latitude est φ. La droite HH' représente l'horizon de cet observateur. L'étoile polaire se situant à une très grande distance de la Terre, on peut considérer que les rayons lumineux qui en sont issus sont parallèles entre-eux lorsqu'ils atteignent notre planète. L'observateur, désirant la repérer, devra regarder le long d'une droite parallèle à la droite pôle Nord-Polaris.
Posons β la hauteur de l'étoile polaire mesurée par l'observateur ; on voit facilement par ailleurs que, les angles α et θ étant correspondants, sont égaux. φ et β sont respectivement les angles complémentaires des angles θ et α, en conséquence :

$$\boxed{\beta = \varphi}$$

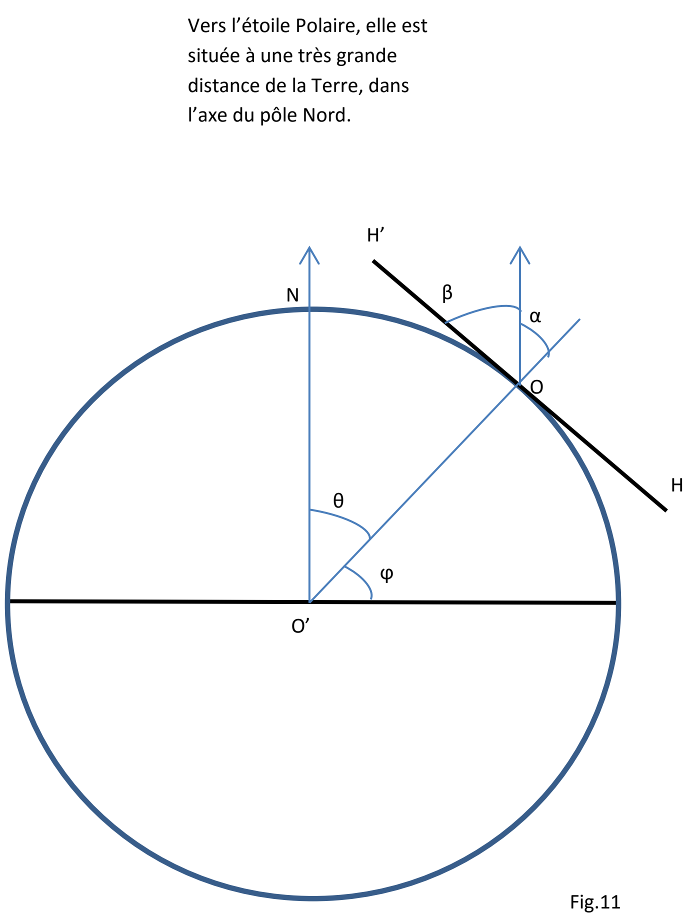


Fig.11

En considérant les différents éléments ci-dessus, on obtient le modèle descriptif de la sphère céleste locale (figure 12).
L'observateur se situe en O, on retrouve la verticale ascendante qui coupe la sphère céleste locale au zénith. Par définition le pôle Nord céleste est perpendiculaire à l'équateur céleste, ce dernier est une ligne imaginaire dans le ciel construite par projection de l'équateur terrestre sur la sphère céleste.
Sur la figure 12, on retrouve φ, l'angle que fait le pôle céleste avec l'horizon Nord, il est égal à la latitude du lieu comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Remarquons que φ est le complément de l'angle compris entre le pôle céleste Nord et le zénith et qu'en conséquence l'angle compris entre l'équateur céleste et l'horizon Sud vaut 90°-φ.

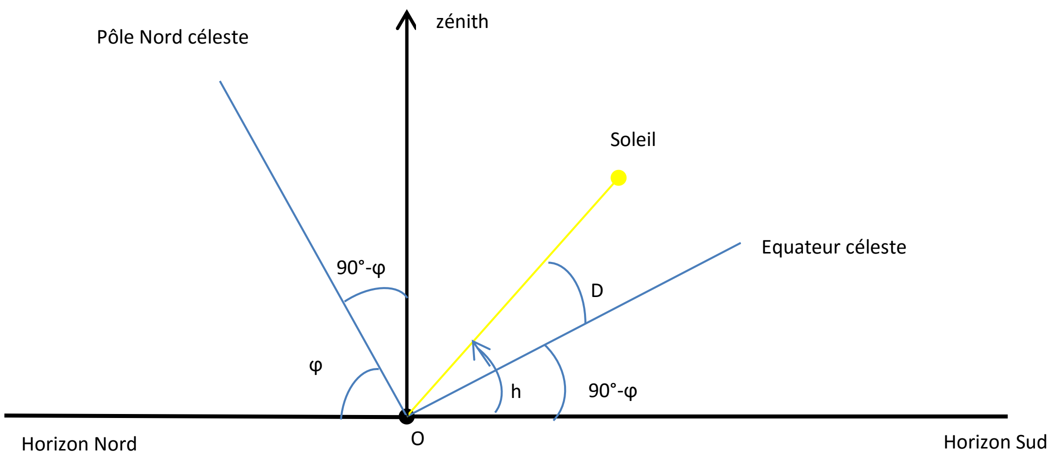


Fig.12

Fort de ce constat, et connaissant la déclinaison D du Soleil, il est simple de déterminer la hauteur de ce dernier lors de son passage supérieur, c'est-à-dire à midi solaire vrai. Notons qu'à cet instant précis le Soleil est dans le plan du méridien local et que sa hauteur est maximale pour la journée considérée. On voit immédiatement sur la figure 12 que la hauteur du Soleil s'exprime par la relation :

$$h_{max} = 90° + D - \varphi \qquad (1)$$

Prenons quelques exemples afin d'illustrer notre propos :

1er exemple : équinoxe, D=0, Presqu'île de Guérande

$$h_{max} = 90 + 0 - 47 = 43°$$

2ème exemple : Solstice d'été, D=23,4°, Presqu'île de Guérande

$$h_{max} = 90 + 23{,}4 - 47 = 66{,}4°$$

3ème exemple : Solstice d'hiver, D=-23,4°, Presqu'île de Guérande

$$h_{max} = 90 - 23{,}4 - 47 = 19{,}6°$$

Maintenant que nous savons calculer la hauteur maximale du Soleil pour une date et un lieu donné, nous allons étudier l'évolution de la hauteur du Soleil pour différentes latitudes de l'hémisphère Nord.

3 Elévation maximale du Soleil en fonction de la latitude.

3.1 Du pôle Nord au cercle arctique ($66{,}6° \leq \varphi \leq 90°$)

3.1.1 Pôle Nord (φ=90°)

La latitude du lieu vaut 90°, la formule (1), donne immédiatement :

$$h = D$$

La hauteur du Soleil, au pôle, est égale à sa déclinaison

Le Soleil se lève le jour de l'équinoxe de printemps et se couche le jour de l'équinoxe d'automne. La journée polaire[2] dure 186 jours La nuit polaire débute à l'équinoxe d'automne et s'achève à l'équinoxe de printemps, sa durée est de 179 jours.

3.1.2 Cercle arctique (φ=66,6°)

En considérant la déclinaison minimale et maximale du Soleil, nous pouvons à partir de la relation (1) établir la double inégalité suivante :

$$90 - 23{,}4 - 66{,}6 \leq h_{max} \leq 90 + 23{,}4 - 66{,}6$$

$$0 \leq h_{max} \leq 46{,}8°$$

[2] Dans ce document, la journée est définit comme étant la durée séparant le Lever du Coucher du Soleil.

Nous remarquons qu'il n'y a pas de Lever de Soleil le jour du solstice d'hiver sur le cercle arctique.

Résumons : dans la zone polaire arctique la hauteur maximale du Soleil lors du passage au méridien est comprise entre :

$$-23{,}4° \leq h_{max} \leq 46{,}8°$$

3.2 Du cercle arctique au tropique du Cancer. $(23{,}4° \leq \varphi \leq 66{,}6°)$

3.2.2 Tropique du Cancer (φ=23,4°)

Comme dans le cas du cercle arctique, nous déterminons la déclinaison minimale et maximale du Soleil, et à partir de la formule (1), nous avons la double inégalité suivante :

$$90 - 23{,}4 - 23{,}4 \leq h_{max} \leq 90 + 23{,}4 - 23{,}4$$

$$43{,}2° \leq h_{max} \leq 90°$$

On constate que le jour du Solstice d'été, le Soleil est au zénith des lieux situés sur le tropique du Cancer.

On en conclu que dans la zone tempérée $23{,}4° \leq \ \varphi \leq 66{,}6°$, la culmination du Soleil est comprise entre :

$$0 \leq h_{max} \leq 90°$$

Solstice d'hiver sur le cercle polaire arctique.

Solstice d'été sur le tropique du Cancer

3.3 Du tropique du Cancer à l'Equateur $(0 \leq \varphi \leq 23{,}4°)$

3.3.1 A l'Equateur (φ=0°)

Appliquons là encore la relation (1) en considérant la déclinaison minimale et maximale du Soleil :

$$90 - 23{,}4 \leq h_{max} \leq 90 + 23{,}4$$

$$66{,}6° \leq h_{max} \leq 113{,}3°$$

Le résultat ici peut surprendre, en effet la hauteur maximale atteinte par le Soleil dépasse 90° entre l'équinoxe de printemps et celui d'automne. Comment interpréter ce résultat ? Nous pouvons déjà faire plusieurs remarques :

- L'équateur céleste et le zénith sont confondus.
- Le pôle Nord céleste et le pôle nord géographique sont confondus. L'étoile polaire est dans le plan horizontal de l'observateur.
- Deux fois par an, aux équinoxes, le Soleil passe au zénith.

Le graphique de la figure 12 évolue alors de la manière suivante :

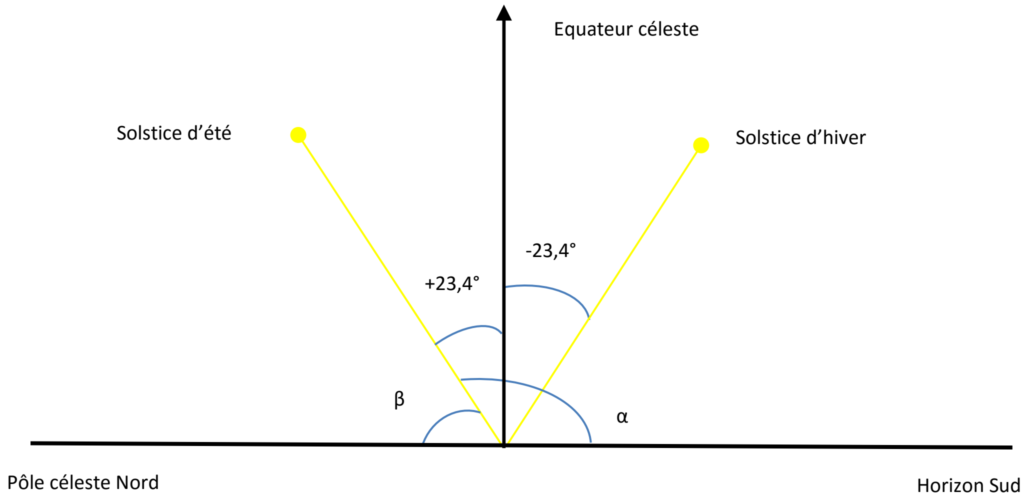


Fig.13

Décrivons le mouvement du Soleil pendant une année complète du point de vue de l'observateur. Lors de l'équinoxe de printemps le Soleil se situe dans le plan de l'équateur céleste et culmine au zénith. De l'équinoxe de printemps à celui d'automne, le Soleil évolue dans la direction de l'horizon Nord : à midi solaire vrai ces jours-là, l'ombre d'un bâton vertical est dirigée vers le Sud. Le jour du Solstice d'été, l'astre du jour culmine à sa hauteur minimale.
Oui certes, mais quelle hauteur ?
Regardons de nouveau la figure 13 et considérons les angles α et β, l'angle α est le supplément de l'angle β, c'est-à-dire que nous pouvons écrire :

$$\beta = 180° - \alpha$$

Fort de ce constat, nous faisons évoluer la relation (1) de la manière suivante lorsque le Soleil culmine dans la direction de l'horizon Nord

$$h_{max} = 180 - [90 + D - \varphi] \qquad (2)$$

Pour l'observateur, le Soleil culmine à 66,6 ° dans la direction du Nord le jour du Solstice d'été, puis sa hauteur maximale va croître avant d'atteindre le zénith le jour de l'équinoxe d'automne avant de commencer à décroître dans la direction de l'horizon Sud jusqu'à atteindre la hauteur minimale de 66,6° le jour du Solstice d'hiver. A partir de ce jour, la hauteur maximale croît de nouveau jusqu'à l'équinoxe de printemps.
De l'équinoxe d'automne à celui du printemps, la culmination du Soleil est déterminée par la formule (1).

3.3.2 Dans la zone tropicale.

Cette zone est comprise entre le parallèle du tropique du Cancer (23,4°) et celui de l'équateur (0°).
Reprenons la formule (1) :

$$h_{max} = 90° + D - \varphi$$

Et voyons les conditions pour lesquelles le Soleil se situe dans la direction de l'horizon Nord, nous savons que dans le cas de la formule (1) $h_{max} \geq 90°$ d'où :

$$h_{max} \geq 90° \;\; => \;\; D - \varphi \geq 0 \;\; => \;\; D \geq \varphi$$

On en conclut qu'en tout point de la zone tropicale, le Soleil passe deux fois par an au zénith lorsque sa déclinaison est égale à la latitude du lieu.

1er exemple : φ=20°

Considérons un lieu dont la latitude est de 20°, les passages du Soleil au zénith se produisent le 20 mai et le 25 juillet[3] .A midi ces jours-là, un mât vertical ne porte pas d'ombre. Entre ces deux dates, l'ombre à midi est dirigée vers le Sud : le Soleil est situé dans la direction de l'horizon Nord.

2ème exemple : φ=10°

Cette fois-ci les passages du Soleil au zénith se produisent le 16 avril et le 28 août. Entre ces deux dates, le Soleil est situé dans la direction de l'horizon Nord.

On en conclu que dans la zone tropicale $0° \leq \varphi \leq 23{,}4°$, la culmination du Soleil est comprise entre :

$$43{,}2 \leq h_{max} \leq 90°$$

Solstice d'hiver sur le tropique du Cancer

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments astronomiques nécessaire pour déterminer la latitude de nos amis aviateurs, il reste néanmoins à expliquer à ces derniers comment mesurer la hauteur du Soleil, donnée indispensable[4] pour déterminer leur position.

4 Détermination de la latitude des aviateurs.

4.1.1 Un peu de géométrie

Lors de son premier voyage en Egypte Thalès de Milet (6ème siècle avant JC), considéré comme l'un des sept sages de l'Antiquité appliqua les propriétés des triangles semblables pour mesurer la hauteur de la grande pyramide de Khéops.
Citons Thalès :

'' Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est la même que celui que la pyramide entretient avec la sienne.''

Par une simple relation de proportionnalité, il obtint la hauteur de la pyramide grâce à la longueur de son ombre.

[3] Voir le document ''Calcul de la déclinaison du Soleil en fonction de la date de l'année'' sur ce même site.

[4] Pour la méthode choisie

Considérons la figure 14 :

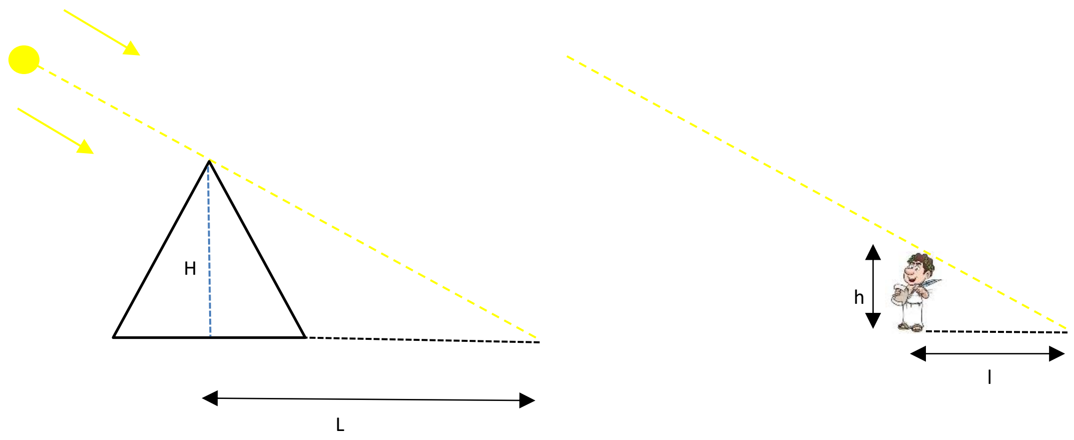


Fig.14

Les propriétés de similitude des triangles donnent l'égalité suivante :

$$\frac{H}{L} = \frac{h}{l}$$

C'est en s'inspirant de cette méthode que nos aviateurs vont pouvoir déterminer leur latitude. Cependant, les longueurs H et L ne sont pas accessibles, il est donc nécessaire d'adopter une méthode différente.

4.1.2…….et un peu de trigonométrie.

La trigonométrie est la branche des mathématiques qui fait intervenir dans les calculs des angles quelconques ou leur rapport avec les côtés d'un triangle[5] qui les comprend. Trigonométrie signifie littéralement *''mesure du triangle''*. Ses grandes lignes furent établies au deuxième siècle avant notre ère par Hipparque qui s'en servit pour établir, en autre, la distance de la Terre à la Lune.
Son contemporain Ptolémée poursuivie son œuvre.

Attardons-nous un peu sur quelques notions élémentaires de trigonométrie. Elle fut à ses débuts le support technique de l'astronomie.

Un triangle a trois côtés, il est donc possible d'établir 6 rapports distincts entre ces trois côtés pris deux à deux. Voyons le triangle rectangle de la figure 15 :

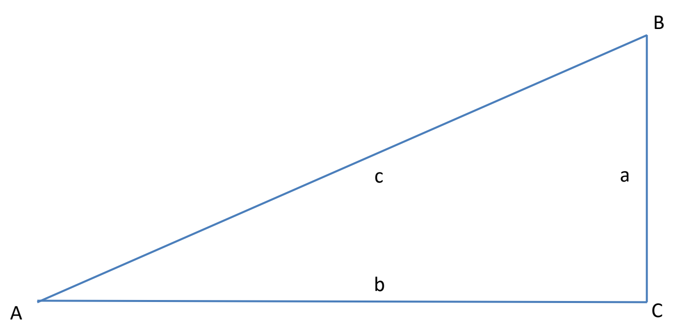


Fig.15

[5] Notons que dans l'expression ''lignes trigonométriques'', le terme lignes se rapporte aux segments d'une figure géométrique.

Il a trois angles : A et B qui sont aigus et complémentaires, C qui est droit. Les trois côtés a, b et c sont opposés aux angles de même nom : c est l'hypothénuse, a est opposé à A comme b est opposé à B, a est adjacent à B et à C, b est adjacent à A et à C.
Entre les côtés a, b et c, nous pouvons établir les six rapports suivants :

$$\frac{a}{b} \quad \frac{a}{c} \quad \frac{b}{a} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{c}{a} \quad \frac{c}{b}$$

qui sont les mêmes pour tous les triangles semblables. Chacun de ces six rapports est fixé par la mesure d'un des angles aigus du triangle rectangle, il a reçu un nom spécial :

Le *sinus* d'un angle est le rapport entre le côté opposé à l'angle et l'hypothénuse :

$$sinus\ A = \frac{a}{c} \qquad , \qquad sinus\ B = \frac{b}{c}$$

Le *cosinus* d'un angle est le rapport entre le côté adjacent à cet angle et l'hypothénuse

$$cosinus\ A = \frac{b}{c} \qquad , \qquad cosinus\ B = \frac{a}{c}$$

La *tangente* d'un angle est le rapport entre le côté opposé à cet angle et l'autre côté de l'angle droit :

$$tangente\ A = \frac{a}{b} \qquad , \qquad tangente\ B = \frac{b}{a}$$

La co*tangente* d'un angle est le rapport entre le côté adjacent à cet angle et l'autre côté de l'angle droit :

$$cotangente\ A = \frac{b}{a} \qquad , \qquad cotangente\ B = \frac{a}{b}$$

La sécante d'un angle est le rapport entre l'hypothénuse et le côté adjacent à l'angle considéré:

$$sécante\ A = \frac{c}{b} \qquad , \qquad sécante\ B = \frac{c}{a}$$

La cosécante d'un angle est le rapport entre l'hypothénuse et le côté opposé à l'angle considéré:

$$cosécante\ A = \frac{c}{a} \qquad , \qquad cosécante\ B = \frac{c}{b}$$

Cela fait donc douze rapports pour un seul triangle.

Remarquons que le sinus d'un angle est le cosinus de son complément. De même, la tangente d'un angle est la cotangente de son complément et il en est ainsi pour la sécante et la cosécante. Nous pouvons constater aussi que la cosécante d'un angle est l'inverse de son sinus, la sécante l'inverse de son cosinus, la cotangente l'inverse de la tangente, et vice-versa.
Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour déterminer la hauteur du Soleil.

4.1.3 Détermination de la hauteur du Soleil.

Rappelons que ce qui nous intéresse ici est de déterminer la hauteur du Soleil lorsque ce dernier atteint son point de culmination, ce point est atteint à midi solaire vrai.
Nos aviateurs étant dépourvus de tout matériel, le plus simple consiste à planter un bâton dans le sol de telle sorte qu'il soit perpendiculaire au plan horizontal. (un aviateur peut d'ailleurs faire office de bâton). L'ombre est alors projetée sur le sol (figure 16).

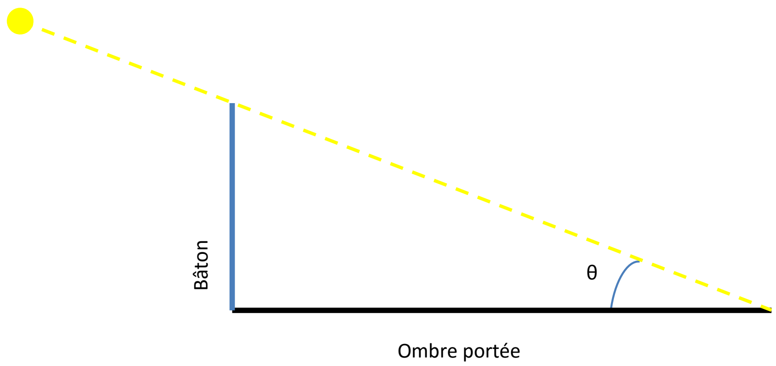


Fig.16

La manipulation consiste à jalonner toute les minutes l'extrémité de l'ombre projetée au sol. L'opération devra débuter au minimum une demi-heure avant et s'achever une demi-heure après le midi solaire vrai, il convient ensuite de mesurer la distance séparant le bâton du jalon le plus proche.
Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'exprimer la grandeur mesurée avec l'unité du système international puisque seul le rapport de deux grandeurs de même nature nous intéresse ici. Il suffit alors d'utiliser une unité de mesure quelconque, (morceau de bois, feuille de papier) et de compter le nombre d'unités que contiennent le bâton et son ombre.
Remarquons que plus la longueur de l'unité sera petite devant celle du bâton ou de son ombre, plus la précision de la mesure sera grande.
Parmi les six rapports évoqués au chapitre précédent la tangente est celui qui se prête le mieux au calcul de la hauteur ; en nommant :

n : *le nombre d'unité que contient le bâton*
m : *le nombre d'unité que contient l'ombre projetée*

La tangente de l'angle θ s'exprime par le rapport :

$$tg\ \theta = \frac{n}{m}$$

Une règle à calcul ou une Table trigonométrique (nous sommes en 1940 ne l'oublions pas …) donne immédiatement aux opérateurs radio à l'écoute des aviateurs la valeur de l'angle θ, soit la hauteur du Soleil par rapport au plan horizontal local.

4.1.4 La latitude … enfin ….

Nous allons commencer par rassembler les différentes relations que nous avons établies ci-dessus et dont nous allons avoir besoin :

Zone polaire arctique

$$-23{,}4° \leq h_{max} \leq 46{,}8°$$

Solstice d'hiver au pôle Nord

Solstice d'été sur le cercle Arctique

Zone tempérée.

$$0 \leq h_{max} \leq 90°$$

Solstice d'hiver sur le cercle polaire arctique.

Solstice d'été sur le tropique du Cancer

Zone tropicale

$$43{,}2 \leq h_{max} \leq 90°$$

Solstice d'hiver sur le tropique du Cancer

Rappelons également les formules dont nous aurons besoin :

$$h_{max} = 90° + D - \varphi \qquad (1)$$

$$h_{max} = 180 - [90 + D - \varphi] \quad (2)$$

Le plus simple est d'expliciter l'utilisation de ces formules à travers quelques exemples.

1er exemple _ $h_{max} = 45°$

Imaginons que les aviateurs aient mesuré une hauteur de 45° lors du passage du Soleil au méridien. L'examen des relations ci-dessus montre que l'atterrissage forcé est possible dans les trois zones. En réalité, l'élément discriminant est la déclinaison du Soleil, la connaissance du jour de l'année est indispensable pour déterminer la latitude du lieu avec la méthode indiquée[6].Lorsque la déclinaison du Soleil pour la date en question est connue, il ne reste plus qu'appliquer les relations (1) et (2). Dans cet exemple, nous allons considérer les trois cas remarquables de l'année.

1er cas : solstice d'été : D = 23,4°

La relation (1) donne, après manipulation algébrique :

$$\varphi_1 = 68{,}4°$$

La relation (2) donne :

$$\varphi_2 = -21{,}6°$$

[6] Voir le document '' Calcul de la déclinaison du Soleil en fonction de la date de l'année''. Dans ce document des Tables sont directement prêtes à l'emploi.

La latitude ne pouvant être négative, la position correcte correspond à 68,4° de latitude Nord.

2ème cas : équinoxe : D = 0
La relation (1) donne, après manipulation algébrique :

$$\varphi_1 = 45°$$

La relation (2) donne :

$$\varphi_2 = -45°$$

3ème cas : solstice d'hiver : D = -23,4°
La relation (1) donne, après manipulation algébrique :

$$\varphi_1 = 21{,}6°$$

La relation (2) donne :

$$\varphi_2 = -68{,}4°$$

2ème exemple _ $h_{max} = 80°$
En ce 12 mai, les aviateurs ont mesuré une hauteur de 80° lors du passage du Soleil au méridien. Ils ne peuvent donc être qu'en zones tempérée ou tropicale. La Table des déclinaisons nous indique que le 12 mai celle-ci est de 18°
Les relations (1) et (2) nous donnent :

$$\varphi_1 = 28°$$

$$\varphi_2 = 8°$$

Nous avons cette fois-ci deux solutions positives : l'une correspondant à la zone tempérée et l'autre à la zone tropicale. Ce genre de situation se produit lorsque dans la relation (2) la somme algébrique de la déclinaison et de la hauteur est supérieure à 90°, ce qui n'est possible que dans la zone tropicale. La latitude des aviateurs est donc ici de 8°.

Conclusion.

Dans cette première partie, nous avons vu comment nous pouvions déterminer la latitude d'un lieu à partir du passage du Soleil au méridien. Afin de définir de façon univoque la position de nos aviateurs, il reste à déterminer leur longitude. Ce sera l'objet de la deuxième partie des '' aviateurs perdus''.

Septembre 2016.

Thierry Piou.