

Forces de marées. Approche heuristique.

Thierry Piou sociétaire du Club d'astronomie "Pêcheurs d'étoiles" La Baule.

Introduction

Nous nous proposons d'étudier dans l'Univers la force relative à laquelle est soumis un point matériel P de masse m situé à la surface du corps β de masse M_β animé d'un mouvement de révolution autour d'un autre corps α de masse M_α avec pour hypothèse $M_\alpha \gg M_\beta$ sans tenir compte d'un éventuel mouvement de rotation de β sur lui-même.

On appelle R la distance séparant les centres des corps β et α et r le rayon du corps β avec pour hypothèse $R \gg r$

1.1 Systèmes, référentiels, repères.

Le système est le point matériel P de masse m situé sur le corps β . Le référentiel inertiel, absolu dans notre formalisme (voir [ici](#))

), est décrit par le repère (O, x_1, x_2, x_3) où O est au centre du corps α et x_1, x_2, x_3 dirigés vers des étoiles lointaines supposées fixes. Le référentiel relatif est décrit par le repère (A, y_1, y_2, y_3) dont A est au centre du corps β et y_1, y_2, y_3 respectivement parallèles à x_1, x_2, x_3 (figure 1)

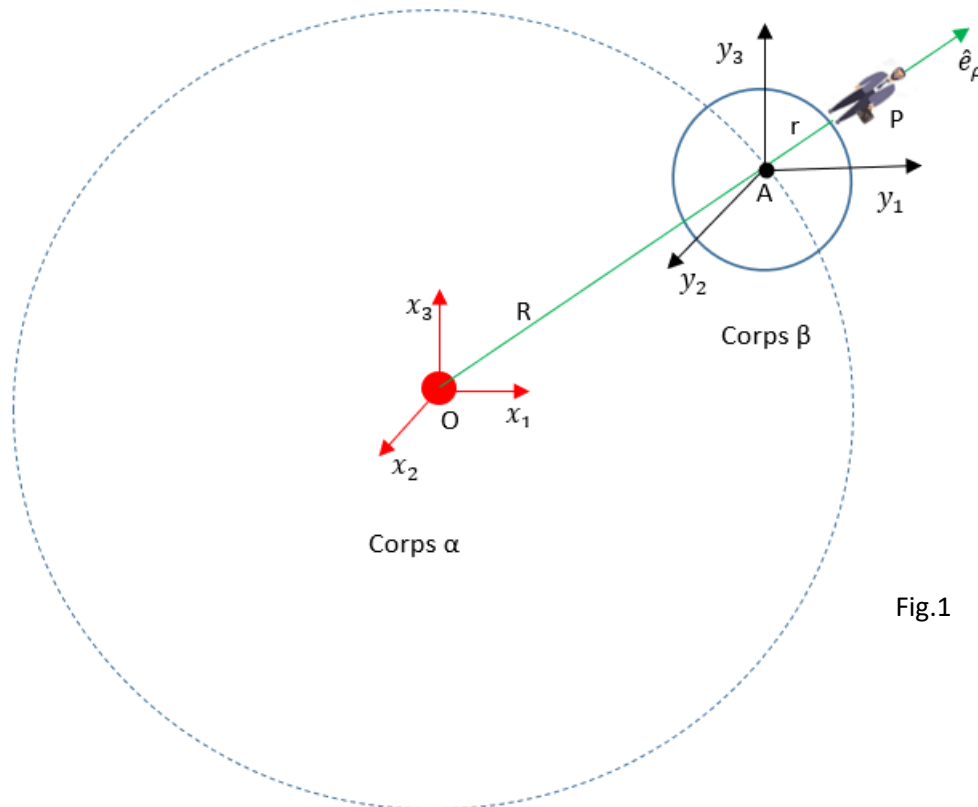


Fig.1

1.2 Contraintes

Le mouvement du corps β autour de α est circulaire uniforme à une distance R de centre à centre : $OA = R$. Le rayon du corps β est r .

1.3 Bilan des forces de contraintes.

Le point matériel P est soumis à deux forces par rapport au référentiel absolu :

$$\text{Attraction du corps } \beta \quad -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho \quad (1)$$

$$\text{Attraction du corps } \alpha \quad -\frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho \quad (2)$$

où G est la constante de la gravitation universelle.

1.4 Dynamique du point matériel P .

Si le corps β était immobile, nous aurions à faire à un repère inertiel et la loi de la dynamique

$$\text{s'écrirait } m\vec{a}_a(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho$$

mais ici ce n'est pas le cas, le corps β est animé d'un mouvement circulaire uniforme et nous devons utiliser le formalisme que nous avons mis en place :

$$m\vec{a}_r(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r(P) - m\dot{\vec{\Omega}} \wedge \overline{AP} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{AP}) \quad (3)$$

Les contraintes du problème imposent une simplification de (3), en effet les axes du repère sont respectivement parallèles à ceux du repère absolu, le référentiel relatif décrit par le repère (A, y_1, y, y_3) n'est donc affecté d'aucun mouvement de rotation sur lui-même, donc $\vec{\Omega} = \vec{0}$
Il vient que :

$$m\vec{a}_r(P) = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_a(A) \quad (3')$$

Les forces de contraintes sont les suivantes :

$$\sum_i \vec{F}_i = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho \quad (4)$$

la loi de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho - m\vec{a}_a(A) \quad (5)$$

Il nous faut maintenant expliciter le terme $m\vec{a}_a(A)$. Le point A est accéléré par rapport au point O : A est en chute libre par rapport à O , nous pouvons écrire :

$$m\vec{a}_a(A) = -mR\omega^2 \hat{e}_\rho \quad (6)$$

où ω est la vitesse angulaire scalaire du rayon vecteur de direction \hat{e}_ρ , la dynamique du point matériel P devient donc :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \underbrace{\frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + mR\omega^2 \hat{e}_\rho}_{\text{termes de marées}} \quad (5')$$

La somme vectorielle $-\frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + mR\omega^2 \hat{e}_\rho$ est constituée des termes dit de marées.

Si on étudie le mouvement du corps β depuis le référentiel absolu, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$\vec{a}_a(A) = -R\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (7)$$

En conséquence l'expression (5') devient :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R+r)^2} \hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (5'')$$

Nous allons maintenant procéder à une petite transformation algébrique, remarquons que :

$$(R+r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \quad (8)$$

En mettant R^2 en facteur :

$$(R+r)^2 = R^2 \left(1 + 2\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right) = R^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right)^2 \quad (8')$$

L'expression (5'') devient alors :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{R^2} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-2} \hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (5^{(3)})$$

Un développement limité au 1^{er} ordre nous donne :

$$\left(1 + \frac{r}{R} \right)^{-2} \approx 1 - 2\frac{r}{R} \quad (8'')$$

L'expression (5⁽³⁾) devient :

$$m\vec{a}_r(P) \approx -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{R^2} \left(1 - 2\frac{r}{R} \right) \hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (5^{(4)})$$

On développe l'expression (5⁽⁴⁾) :

$$m\vec{a}_r(P) \approx -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho + 2\frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (5^{(5)})$$

Soit après simplification :

$$m\vec{a}_r(P) \approx -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho + 2 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho \quad (5^{(6)})$$

Commentons ce résultat :

Le point matériel P est soumis à une première force due au corps β , elle correspond au premier terme de l'expression (5⁽⁶⁾).

Il est également soumis à une seconde force de même sens que \hat{e}_ρ et qui en conséquence s'oppose au poids \vec{P} du point matériel.

Considérons maintenant le cas où le point matériel est situé entre le centre du corps α et le centre du corps β (figure 2)

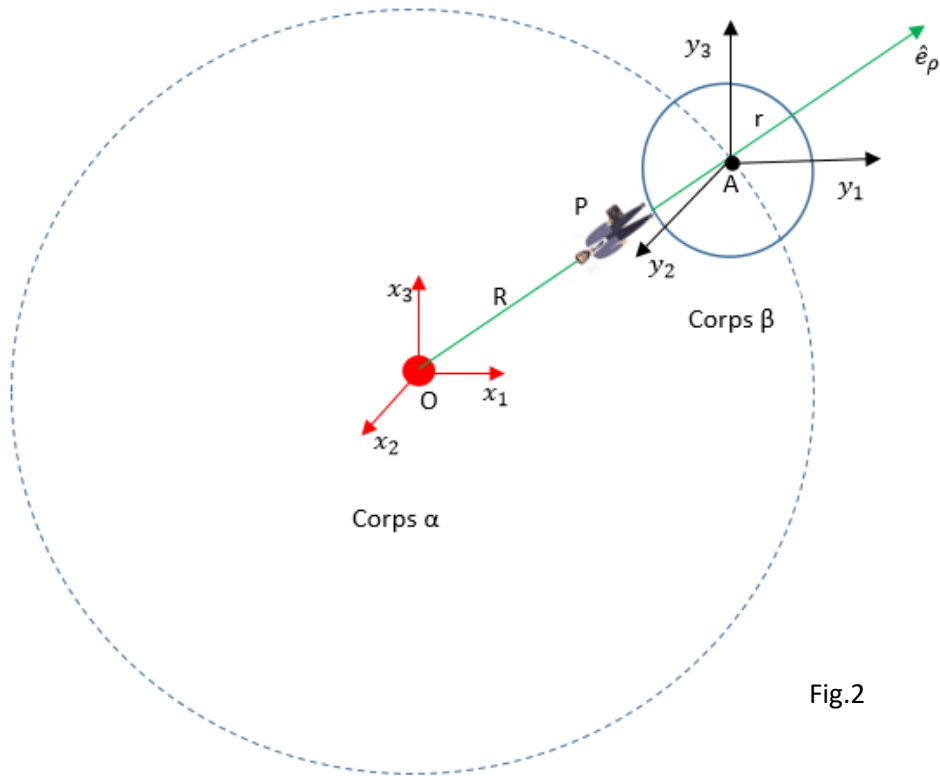


Fig.2

Comme précédemment, faisons le bilan des forces de contraintes s'exerçant sur le point matériel P

$$-\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho$$

La distance entre le corps α et le point matériel P est R-r. L'attraction exercée par α est donc :

$$-\frac{GM_\alpha m}{(R-r)^2} \hat{e}_\rho \quad (9)$$

Notre point matériel est donc soumis à la force :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R-r)^2} \hat{e}_\rho + mR\omega^2 \hat{e}_\rho \quad (10)$$

Comme précédemment nous avons :

$$\vec{a}_a(A) = -R\omega^2 \hat{e}_\rho = -\frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho$$

L'expression (10) devient :

$$m\vec{a}_r(P) = -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - \frac{GM_\alpha m}{(R-r)^2} \hat{e}_\rho + \frac{GM_\alpha m}{R^2} \hat{e}_\rho \quad (10')$$

On procède à un développement similaire à celui vu plus haut et tout calcul fait, on obtient :

$$m\vec{a}_r(P) \approx -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - 2 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho \quad (10'')$$

Commentons ce résultat :

Nous remarquons que le point matériel P est toujours soumis à la force d'attraction du corps β . Il est également soumis à une seconde force de sens opposé à \hat{e}_ρ et qui s'oppose donc au poids \vec{P} du point matériel. Notons que le module de $m\vec{a}_r(P)$ est identique dans les deux expressions (5⁽⁶⁾) et (10'').

Nous appellerons \vec{F}_m , force de marée, la force différentielle :

$$|\vec{F}_m| = \left| -\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho + 2 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho - \left(-\frac{GM_\beta m}{r^2} \hat{e}_\rho - 2 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho \right) \right| \quad (11)$$

soit,

$$|\vec{F}_m| = 4 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \quad (11')$$

1.5 Généralisation.

Rappelons tout d'abord que la force d'inertie d'entraînement ($m\vec{a}_a(A)$ dans l'expression(3')) est la même dans tout le référentiel accéléré.

Le point matériel est donc soumis à deux forces :

- La force d'inertie d'entraînement $m\vec{a}_a(A)$
- La force centrale d'attraction du corps α que nous noterons \vec{F}_α

A tout instant nous avons :

$$m\vec{a}_r(P) = m\vec{a}_a(A) + \vec{F}_\alpha \quad (12)$$

Ceci est illustré à la figure 3. Remarquons qu'au centre du corps β , ces deux forces se compensent :

$$m\vec{a}_r(P) = m\vec{a}_a(A) + \vec{F}_\alpha = \vec{0} \quad (12')$$

d'ailleurs l'expression (11') le montre très bien : si $r = 0$, alors $\vec{F}_m = 4 \frac{GM_\alpha mr}{R^3} \hat{e}_\rho = \vec{0}$ Le centre du corps β subit une accélération $\frac{GM_\beta M_\alpha}{R^2} \hat{e}_\rho$, il est en chute libre autour du corps α .

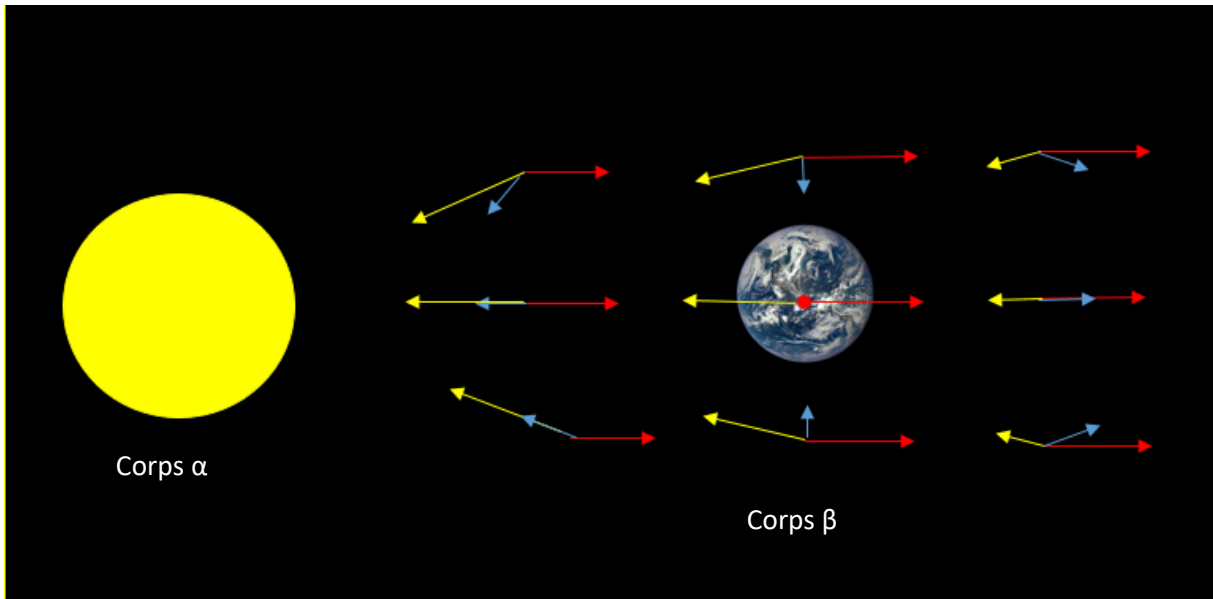


Fig.3

Nous venons de voir que $m\vec{a}_a(A)$ est constant dans le référentiel accéléré, mais ce n'est pas le cas de \vec{F}_α , plus on se rapproche du corps α , plus sa force d'attraction est grande. Le corps β se déforme sous l'effet des forces de marées (figure 4), il est allongé dans la direction corps α -corps β et comprimé selon une direction perpendiculaire à cet axe.



Fig.4