Coordonnées géographiques. Surfaces. Aires.

Thierry Piou sociétaire du Club d'astronomie "Pêcheurs d'étoiles" La Baule

Introduction.
Chaque hémisphère de notre planète est divisé en trois zones distinctes. On se propose ici de déterminer les aires de chacune de ces surfaces après un rappel sur les notions de coordonnées géographiques et les principes fondamentaux de leur détermination.

1.1 Points et lignes remarquables.

Nous allons tout d'abord énoncer deux hypothèses résultant de l'observation :

- *La Terre tourne sur elle-même autour d'un axe fixe en 24 heures sidérales*
- *Elle est sensiblement sphérique.*

En en point A (figure 1) de la Terre nous savons déterminer :

1. La direction de la verticale V grâce à un fil à plomb.
2. Le plan de l'horizon H qui lui est perpendiculaire
3. La direction de l'axe du monde PP' qui passe par le pôle visible du Ciel.

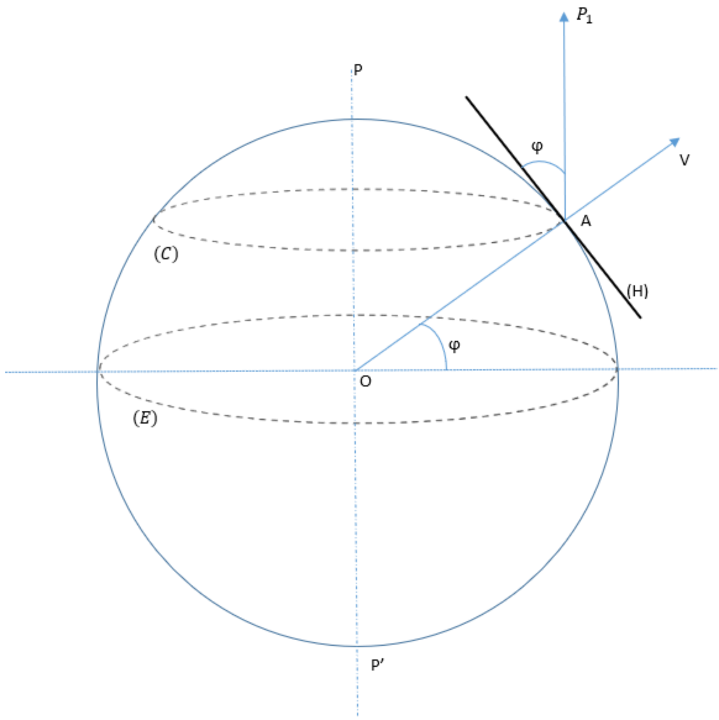


Fig.1

Si la Terre est sphérique, nous pouvons dire que la verticale ascendante AV est le prolongement du rayon OA et d'autre part que le plan de l'horizon en A est le plan tangent à la sphère en ce point.
Le point P situé, par rapport à la Terre, du même côté que le pôle céleste boréal est le pôle Nord de la Terre, le point P' est le pôle Sud.
Dans sa rotation autour de l'axe PP', le point A décrit un cercle perpendiculaire à PP'. Ce cercle est un *parallèle* (C).

Le plus grand des parallèles passe par O : c'est *l'équateur* (E) de la Terre. Son plan est confondu avec l'équateur de la sphère céleste.
Le demi grand cercle de diamètre PP' et passant par A est le *méridien* du point A. Ce méridien tournant d'Ouest en Est balaie la Terre en 24 heures sidérales. Le plan de ce méridien est confondu avec le méridien de la sphère céleste passant par le zénith du point A.
Si de A on vise le pôle céleste visible, on obtient une direction AP_1 parallèle à PP'.

1.2 Coordonnées géographiques.

Nous pourrons déterminer la position d'un point sur la Terre par deux coordonnées : la ***longitude*** et la ***latitude***.

La longitude (L) d'un lieu est l'angle dièdre formé par le méridien choisi comme origine et par le méridien du lieu.

Cet angle peut être compté en degrés de -180 à +180°, il est compté positivement dans le *sens rétrograde* autour de l'axe du monde.
On l'exprime également en *heures*. Il est alors compté entre -12h et +12h.
Par suite d'un accord à l'issue de la conférence internationale de Washington en octobre 1884, le méridien origine, *ou premier méridien universel*, est celui de Greenwich.
Dans les ouvrages russes, les longitudes positives sont encore appelées *occidentales*, les longitudes négatives sont appelées *orientales*.

La latitude d'un lieu est l'angle formé par la verticale du lieu et le plan de l'équateur.

Elle se compte à partir de l'équateur, positivement dans la direction du pôle Nord, elle est donc comprise entre +90° et -90°.
Nous remarquerons que ces définitions subsistent si la Terre est un solide de révolution autour de l'axe des pôles sans être absolument sphérique.

Tous les points d'un même méridien ont même longitude.
Tous les points d'un même parallèle ont même latitude.

La latitude de l'équateur est 0 ; celle du pôle Nord est +90° ; celle du pôle Sud est -90° ; **la longitude des pôles est indéterminée.**

1.3 Principe de la détermination de la longitude. Observations méridiennes

Tous les méridiens sont perpendiculaires au plan de l'équateur terrestre. L'angle dièdre formé par deux méridiens a pour angle plan l'angle découpé sur le plan de l'équateur par ces deux méridiens.
Sur la figure 2, nous avons représenté le méridien de Greenwich PGg, et les méridiens passant par les points A, B, C. La longitude de A est l'angle gPa, elle est orientale ou négative. Les longitudes de B et de C sont les angles gPb et gPc ; elles sont occidentales ou positives.
Soit E un astre connu, que l'on sait repérer sans ambiguïté dans le ciel, et dont on connaît *l'ascension droite*. La rotation de la Terre est uniforme et de sens direct de l'Ouest vers l'Est.
Le méridien de **A** passe devant **E** moins de 12h avant le méridien de **G**, plus précisément la culmination de l'étoile **E** est vue en A avant d'être vue en **G** et moins de 12 heures avant.
Le méridien de **G** passe devant **E** avant les méridiens de **B** ou de **C**, c'est-à-dire que l'étoile **E** culmine en **G** avant de culminer en **B** ou en **C**, et moins de 12h avant.

Or, en tout point de la Terre, l'heure sidérale locale de la culmination d'un astre est égale à l'ascension droite de cet astre. Si l'on peut connaître, au même instant, l'heure indiquée par l'horloge sidérale de Greenwich, un simple calcul de différence entre ces deux heures donnera, en heures, la longitude du point.

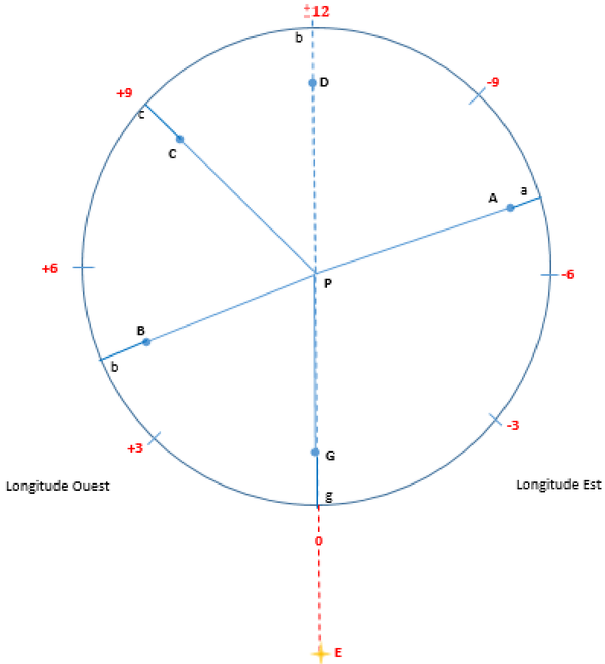


Fig.2

Exemples

1. L'étoile **E** choisie a pour ascension droite 12h40mn. Quand elle culmine en A, il est 12h40mn en ce point. Si l'on sait qu'au même instant, l'horloge sidérale de Greenwich indique 6h30, c'est que **A** a une longitude orientale égale à :

$$6h30mn - 12h40 = \ -6h10mn$$

qui peut s'exprimer en degrés :

$$15° * \left(6 + \frac{1}{6}\right) = 92{,}5°\ Est$$

2. Quand l'étoile **E** culmine en **B**, il est 12h40mn en ce point. Si l'on sait qu'au même instant, l'horloge sidérale de Greenwich indique 17h40mn, la longitude de **C** est :

$$17h40mn - 12h40 = \ \ 5h \qquad ou\ 75°\ Ouest.$$

3. Une étoile d'ascension droite de 17h30mn culmine à 17h30 au méridien du point **C**. Si l'on sait qu'au même instant l'horloge sidérale de Greenwich indique 2h30, la longitude de C est :

$$2h30mn - 17h30 = \ -15h$$

Mais la longitude ne peut être inférieure à -12h, nous ajouterons 24h, ce qui donne :

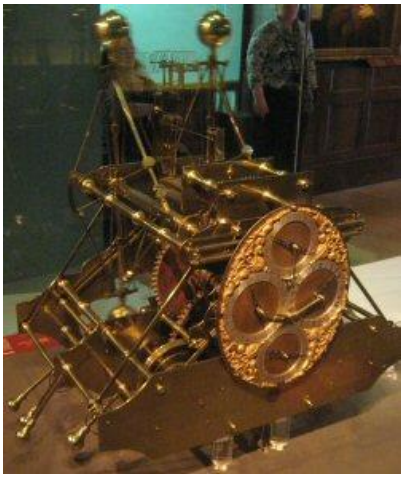
$$24h - 15h = \ 9h \quad ou\ 135°Ouest$$

On remarque sur la figure 2 que -15h et +9h conduisent à la même détermination pour le point **C**.
Le point **D** sur l'antiméridien de Greenwich, a pour longitude aussi bien +12h que -12h. *<u>C'est la ligne de changement de date.</u>*

La longitude d'un lieu est, à 0 ou 24h près, l'excès de l'heure sidérale de l'observatoire de Greenwich sur l'heure sidérale du lieu, au même instant.

Il résulte de cette théorie élémentaire que pour déterminer la longitude d'un lieu, il est nécessaire de posséder une Table donnant les ascensions droites d'un certain nombre d'étoiles facilement observables, ces informations sont publiées chaque année par le Bureau des Longitudes dans son Annuaire. Il est aussi nécessaire de connaître, au moment de la culmination de l'étoile, l'heure sidérale du méridien de Greenwich. Pour cela, plusieurs procédés sont applicables ; nous en présentons deux qui ont un intérêt historique :

1. On peut observer un phénomène céleste *prévu à l'avance* comme par exemple les occultations des satellites de Jupiter, l'observateur notant l'heure sidérale locale au même instant.
2. La méthode précédente n'est pas applicable en mer. Pour un navigateur, il est indispensable d'avoir à bord un chronomètre (un garde-temps)[1] qui permettent de conserver l'heure sidérale de Greenwich. On détermine l'heure sidérale du lieu par la détermination du moment où la hauteur d'un astre est maximum ce qui se fait à l'aide d'un *sextant*.
   L'heure sidérale du lieu est alors donnée par l'ascension droite de l'astre observé qui peut être une étoile, le Soleil, la Lune, une planète.



Le chronomètre H1 de Harrisson

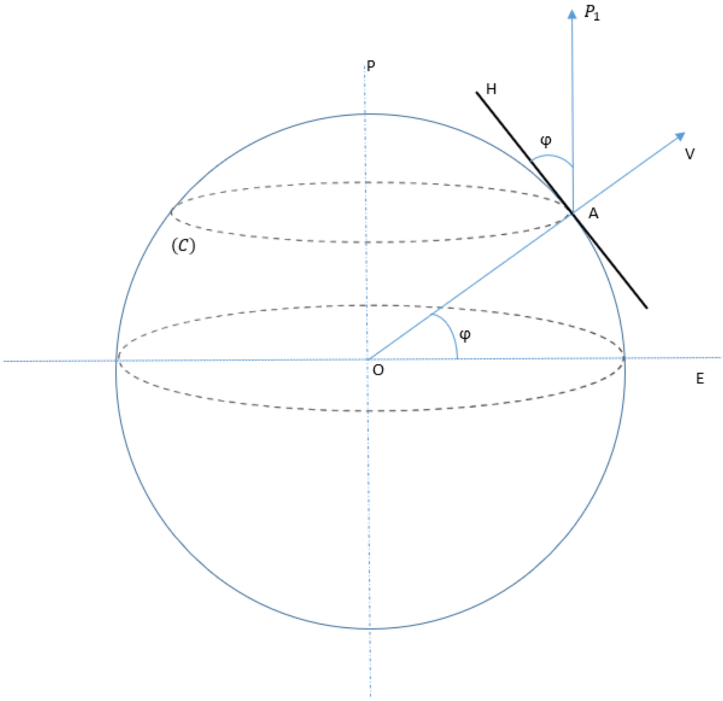
Le chronomètre H4 qui réussit le test transatlantique

L'ascension droite d'une étoile est sensiblement constante pendant une année, mais cette quantité varie chaque jour pour le Soleil, la Lune ou les planètes.

[1] Ce n'est qu'à la fin du 18ème siècle que le problème de la détermination de la longitude en mer fût résolu grâce à l'utilisation comme garde-temps des horloges de marine conçues par John Harrisson, horloger autodidacte, malgré la farouche opposition des astronomes du bureau des longitudes de Londres qui ne voulaient de solutions qu'astronomiques…
Les chronomètres H1 et H4 sont aujourd'hui exposés à l'Observatoire de Greenwich…
Hier comme aujourd'hui, quelle que soit la technologie utilisée (géolocalisation par satellites), pour connaître sa position, il faut savoir l'heure qu'il est !!

1.4 Principe de la détermination de la latitude. Observations méridiennes.

La figure 1, reproduite ci-dessous pour plus de commodité, montre le méridien d'un lieu A.



La verticale en A est perpendiculaire au plan H de l'horizon. Comme nous l'avons vu plus haut, la latitude d'un lieu est l'angle formé par la verticale de ce lieu et le plan de l'équateur.
Menons de A la parallèle AP_1 à OP ; l'angle $\widehat{HAP_1}$ est égal à φ car ses côtés sont perpendiculaires à ceux de l'angle $\widehat{AOE}$.
Or, l'angle $\widehat{HAP_1}$ est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon, cet angle est théoriquement mesurable, d'où le théorème :

La latitude d'un lieu est la hauteur du pôle en ce lieu.

La latitude est positive si le pôle céleste visible est le pôle boréal ; elle est négative si c'est le pôle austral. On dit aussi latitude Nord ou latitude Sud au lieu de latitude positive ou négative.
Nous présentons deux méthodes possibles pour déterminer la latitude d'un lieu :

1. On peut montrer que l'on détermine la hauteur du pôle par la moyenne des hauteurs d'une étoile *circumpolaire*. Considérons la figure 3 :

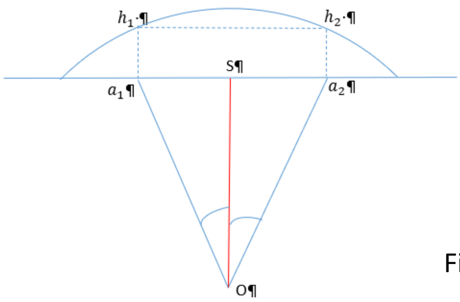
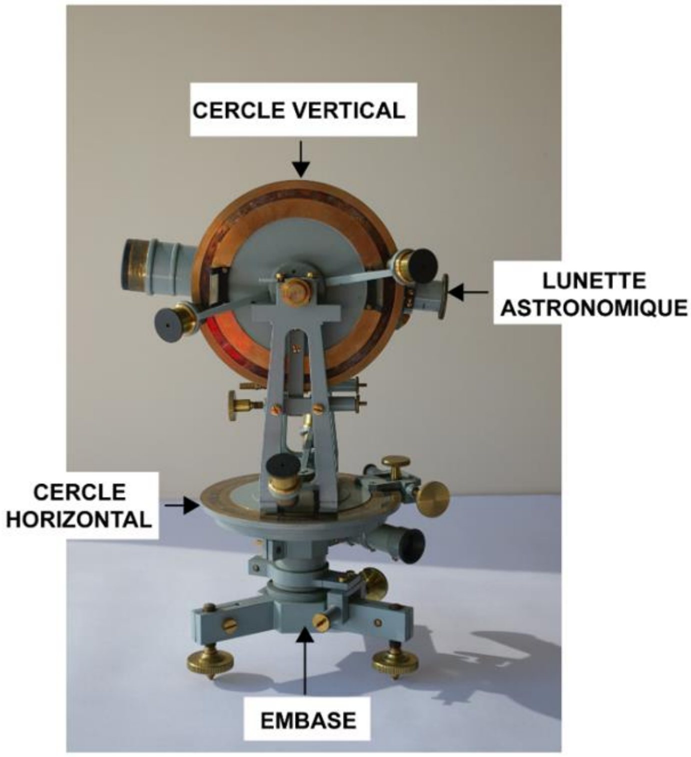


Fig.3

Prenons pour hypothèse que les observations sont faites dans l'hémisphère Nord de la Terre. En regardant vers le Sud, nous observerons une étoile qui se trouve près de l'horizon vers notre gauche au début de l'observation. Nous allons mesurer à des intervalles réguliers son azimut et sa hauteur grâce à un théodolite.



Les éléments fondamentaux d'un théodolite

Nous la verrons se déplacer de notre gauche vers notre droite (sens rétrograde) ; sa hauteur croît d'abord, atteint un maximum, puis décroît. L'étoile se rapproche de l'horizon, puis disparaît. Nous l'avons suivie ainsi depuis son Lever (h=0) jusqu'à son Coucher (h=0) en passant par le point de plus grande hauteur ou culmination.
Prenons l'azimut a_1 correspondant à la hauteur h dans le mouvement ascendant ; bloquons alors le cercle vertical du théodolite autour de son axe de rotation et attendons le moment où l'étoile, dans son mouvement descendant, reprendra la même hauteur ; elle aura alors un azimut a_2.
Si nous traçons sur le sol l'angle $\widehat{a_1 o a_2}$ défini par ces deux directions, nous constaterons que la bissectrice OS de cet angle est fixe quelle que soit la première valeur de l'azimut et quelle que soit l'étoile considérée. La direction OS définit donc, avec la verticale de O, un plan vertical fixe qui est un *plan de symétrie* de la figure. Les culminations des étoiles ont lieu dans ce plan, que l'on appelle *plan méridien*[2] du point O.

Observons maintenant dans le sens opposé à S. Nous verrons alors le déplacement des étoiles s'effectuer dans le sens direct, ce qui résulte de notre retournement. Quelques-unes n'ont ni Lever ni Coucher ; elles sont toujours au-dessus de l'horizon et passent deux fois dans l'intervalle de 23h56 dans le plan du méridien, à leur culmination ou *passage supérieur* correspondant à la plus grande hauteur (h_M) et à leur *passage inférieur*, correspondant à la petite hauteur (h_m), figure 4.

[2] Si nous notons chaque nuit l'heure de passage de la même étoile dans le plan méridien, nous constaterons qu'entre deux passages successifs il s'écoule un intervalle que nous pouvons considérer ici comme étant constant et d'une durée d'environ 23h56 mn de nos horloges. C'est la durée du jour sidéral.

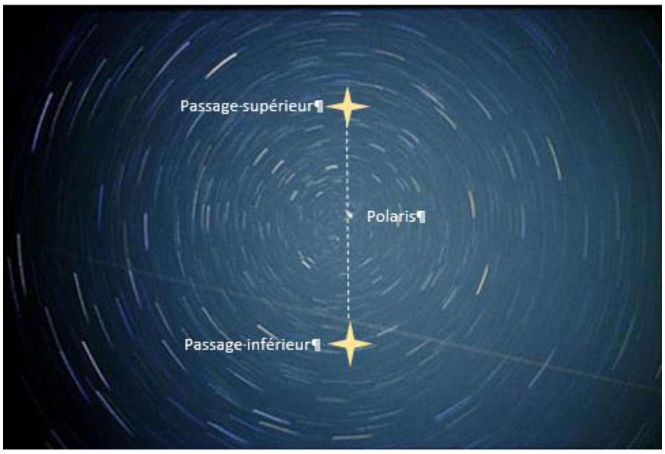


Fig.4

Passages supérieur et inférieur d'une étoile circumpolaire

Nous pouvons faire cette observation pendant les longues d'hiver sur les étoiles de la Grandes Ourses telles que Merak ou Dubhe, et nous trouverons quelle que soit l'étoile choisie que :

$$\varphi = \frac{h_M + h_m}{2}$$

φ est un nombre constant pour un lieu donné, c'est la latitude recherchée. Ces étoiles, qui restent toujours au-dessus de l'horizon d'un lieu d'observation, sont dites *circumpolaires*

2. Considérons la figure 5 :

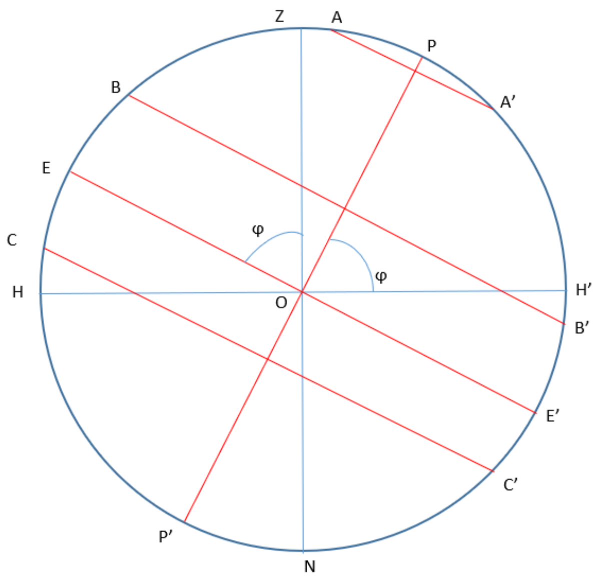


Fig.5

Soit PP', l'axe du monde, nous avons représenté sur le plan d'un méridien la trace de l'horizon HH', celle de l'équateur EE' et les traces AA', BB', CC' des parallèles décrits par plusieurs étoiles. Ces étoiles culminent en A, B, C, leurs déclinaisons respectives δ, δ', δ'' sont les mesures algébriques des arcs EA, EB, EC, le sens positif étant de E vers P, pôle boréal.
La verticale OZ est perpendiculaire à HH'.

Pour l'étoile A on a :

$$\delta = \widehat{EA} = \widehat{EZ} + \widehat{ZA}$$

$\widehat{EZ}$ est égal à $\widehat{H'P}$, ces deux arcs étant superposables par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de O. Or $\widehat{H'P}$ est la hauteur φ du pôle boréal. $\widehat{ZA}$ est la distance zénithale Z de l'étoile à sa culmination supérieure. On a :

$$\delta = \varphi + z$$

Pour l'étoile B, on peut écrire :

$$\delta' = \widehat{EB} = \widehat{EZ} + \left(-\widehat{ZB}\right) = \widehat{EZ} - \widehat{ZB}$$

$$\delta' = \varphi - Z$$

Pour l'étoile C, on aurait également :

$$\delta'' = \widehat{EC} = \widehat{EZ} + \left(-\widehat{ZC}\right) = \widehat{EZ} - \widehat{ZC}$$

$$\delta'' = \varphi - Z$$

Dans ce cas la déclinaison est négative.

Théorèmes :

a) Si une étoile culmine entre le zénith et le pôle boréal, sa déclinaison est la somme de la hauteur du pôle boréal et de la distance zénithale de l'étoile.
b) Si l'étoile est au Sud par rapport au zénith, sa déclinaison est égale à la hauteur du pôle boréal, diminuée de la distance zénithale de l'étoile.

Le corollaire est que l'observation du passage d'une étoile connue donnant Z, on en déduit φ si l'on connait δ.
On trouve les déclinaisons des principales étoiles dans le guide des données astronomiques pour l'observation du ciel publié chaque année par le Bureau des Longitudes aux éditions EDP Sciences :
https://www.imcce.fr/publications/publications-institutionnelles/

Exemple :
L'étoile *Altaïr* de l'*Aigle* a une déclinaison de +8,67°. Un observateur note que sa distance zénithale à la culmination est 38,37° Sa culmination ayant lieu vers le Sud, on prendra :

$$\delta = \varphi - Z$$

Soit

$$\varphi = \delta + Z \;\; => \;\; \varphi = 8{,}67 + 38{,}37 = 47{,}04\,°$$

Le jour, on détermine la latitude par la hauteur du Soleil à sa culmination : ceci nécessite l'emploi d'une table indiquant sa déclinaison quotidienne.[3]

[3] L'observation méridienne n'est qu'un cas particulier qui peut se généraliser à l'observation extra méridienne tant pour la détermination de la latitude que pour celle de la longitude. Les techniques mises en œuvre sont alors plus complexes et nécessitent l'utilisation de la trigonométrie sphérique. Ce sont ces techniques qu'utilisaient les marins, avant le déploiement des systèmes de géolocalisation par satellites, pour faire le point en mer.

2.1 Zones géographiques

Lorsque le Soleil atteint la déclinaison de+23,4°, il se trouve au zénith quand il passe au méridien du point A qui a précisément cette latitude. (figure 6) :

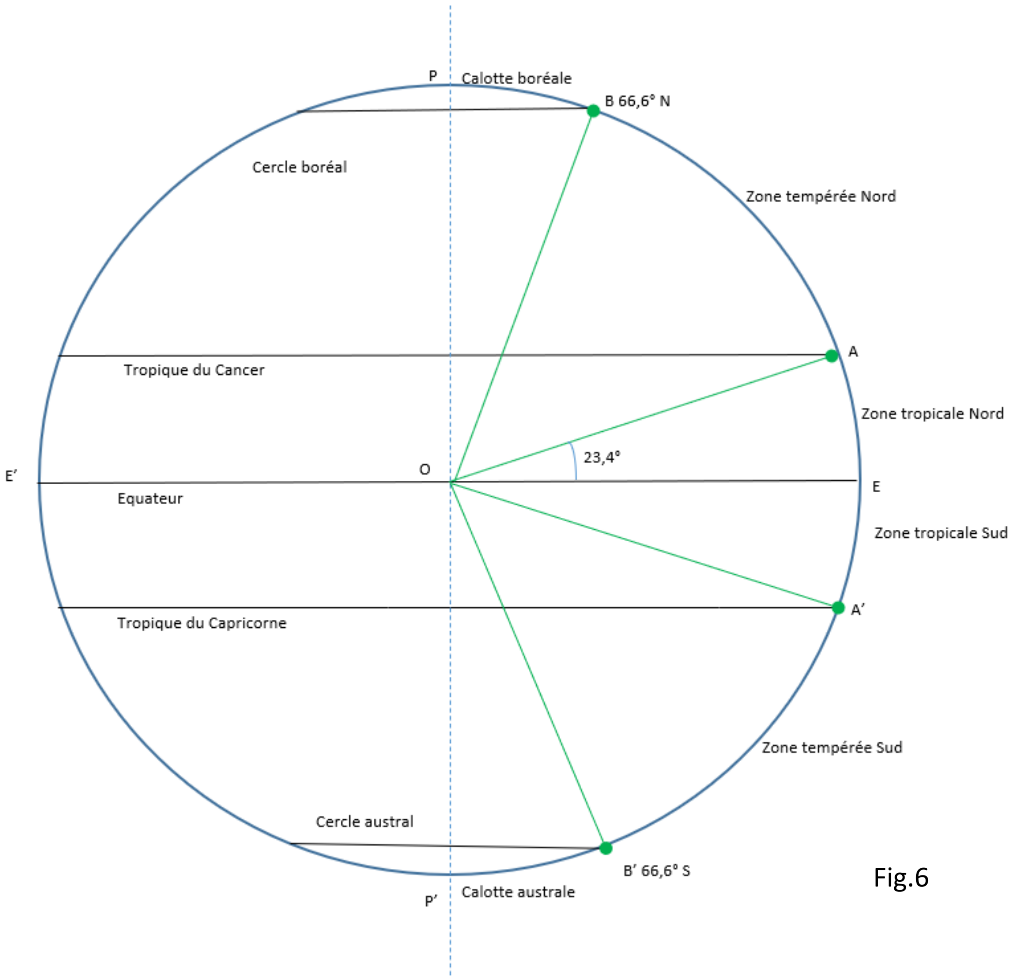


Fig.6

Le lieu des points de la Terre pour lesquels le Soleil passe au zénith le jour du Solstice d'été est le parallèle de latitude 23,4°N. On l'appelle le *<u>tropique du Cancer</u>*.
Les points de latitude 23,4°S forment le *<u>tropique du Capricorne</u>*, le Soleil passe au zénith de ces points au solstice d'hiver.
A ce même solstice d'hiver, le Soleil reste à l'horizon du point B dont la latitude est 66,6°Nord, complément de 23,4°, car l'horizon de B est alors parallèle au rayon OA'. Le Soleil est donc circumpolaire, pendant une période de l'année, pour tous les points dont la latitude est supérieure à 66,6° Nord ou inférieure à 66,6° Sud. Les cercles qui ont ces latitudes sont les *<u>cercles polaires</u>*. Nous distinguons :

- Le cercle polaire *<u>boréal</u>* ou *<u>arctique</u>* : φ=66,6°N
- Le cercle polaire *<u>austral</u>* ou *<u>antarctique</u>* : φ=66,6°S

Les cercles polaires et les tropiques divisent la Terre en *<u>cinq zones géographiques</u>* :

1 La *<u>zone boréale</u>* s'étend du pôle Nord au cercle polaire boréal.
La latitude y est supérieure à 66,6°Nord ; le Soleil y est circumpolaire une partie de l'année.

2 *La zone tempérée Nord* s'étend du cercle polaire boréal au tropique du Cancer :

$$+23{,}4° < \varphi < +66{,}6°$$

Le Soleil se lève et se couche toute l'année, mais ne passe pas au zénith.

3 *La zone équatoriale* s'étend du tropique du Cancer au tropique du Capricorne :

$$-23{,}4° < \varphi < +23{,}4\,°$$

Cette zone est partagée en son milieu par l'équateur de la Terre. Le Soleil passe au zénith de tous ses points à deux reprises au cours d'une année.

4 *La zone tempérée Sud* s'étend du tropique du Capricorne au cercle polaire austral.

$$-66{,}6° < \varphi < -23{,}4°$$

Elle a les mêmes caractéristiques que la zone tempérée Nord.

5 *La zone australe*, s'étend du pôle Sud de la Terre au cercle polaire austral.

$$-90° < \varphi < -66{,}6°$$

Le Soleil est circumpolaire pendant une partie de l'année.

2.2 Aires des zones géographiques

Considérons l'élément de surface engendrée par la corde AB tournant autour de l'axe Oz de la sphère (figure 7) :

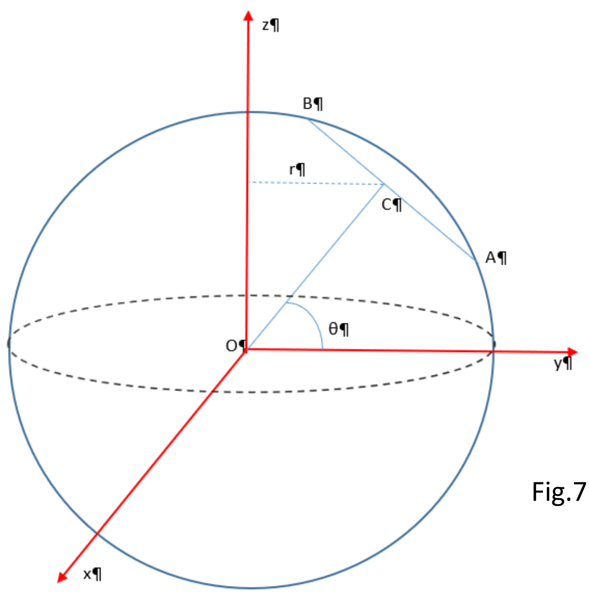


Fig.7

Son centre décrit une circonférence $2\pi r$,ds est l'arc infiniment petit délimité par la corde AB. L'aire élémentaire s'exprime de la façon suivante :

$$dA = 2\pi r ds \quad (1)$$

$r = Rcos\,\theta$ où R est le rayon de la sphère.
$ds = Rd\theta$
L'expression (1) évolue de la façon suivante :

$$dA = 2\pi R^2 cos\theta d\theta \quad (2)$$

En intégrant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on obtient la surface de la sphère :

$$A = 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = 2\pi R^2 \;[sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2 \qquad (3)$$

Cherchons les aires respectives des zones géographiques que nous avons définis au paragraphe 2.1.
Pour des raisons de symétrie, nous prenons en compte seulement un hémisphère, Nord par exemple. Considérons la zone tropicale qui est comprise entre 0 et 23,4°, pour calculer son aire nous reprenons la formule (3) en changeant les bornes d'intégration, exprimées en radian :

$$A_{tropicale} = 2\pi R^2 [sin\theta]_0^{+0,408} = 2\pi R^2 \sin(0,408) \qquad (4)$$

Etablissons le rapport entre l'aire de la zone tropicale et celle d'un hémisphère :

$$\frac{A_{tropicale}}{A_{hémisphère}} = \frac{2\pi R^2 \sin(0,408)}{2\pi R^2} = \sin(0,408) \;\approx 0,4$$

Ainsi, la zone intertropicale représente 40% de la surface du globe terrestre.

Nous procédons de manière identique pour déterminer l'aire de la zone tempérée comprise entre 23,4° et 66,6° :

$$A_{tropicale} = 2\pi R^2 [sin\theta]_{+0,408}^{+1,162} = 2\pi R^2 \;\; [\sin(1,162) - \sin(0,408)] \;\approx\; 2\pi R^2 * 0,52$$

En en déduit immédiatement que les aires des zones tempérées et polaires représentent respectivement 52% et 8% de la surface de la Terre.

Résumons :

- La zone tropicale représente 40% de l'aire d'un hémisphère.
- La zone tempérée en représente 52%
- La zone polaire représente 8% de cette aire.

Nous décrivons en annexe une autre technique permettant de déterminer ces différentes aires en introduisant les coordonnées sphériques si utiles en astronomie.


EN ROUTE POUR LES INDES !...
CHRISTOPHE ! CHRISTOPHE ! TON GPS !..

Annexe : Aires des zones géographiques. Coordonnées sphériques.

1.1 Lignes de coordonnées.

La figure A1 donne les définitions des coordonnées sphériques :

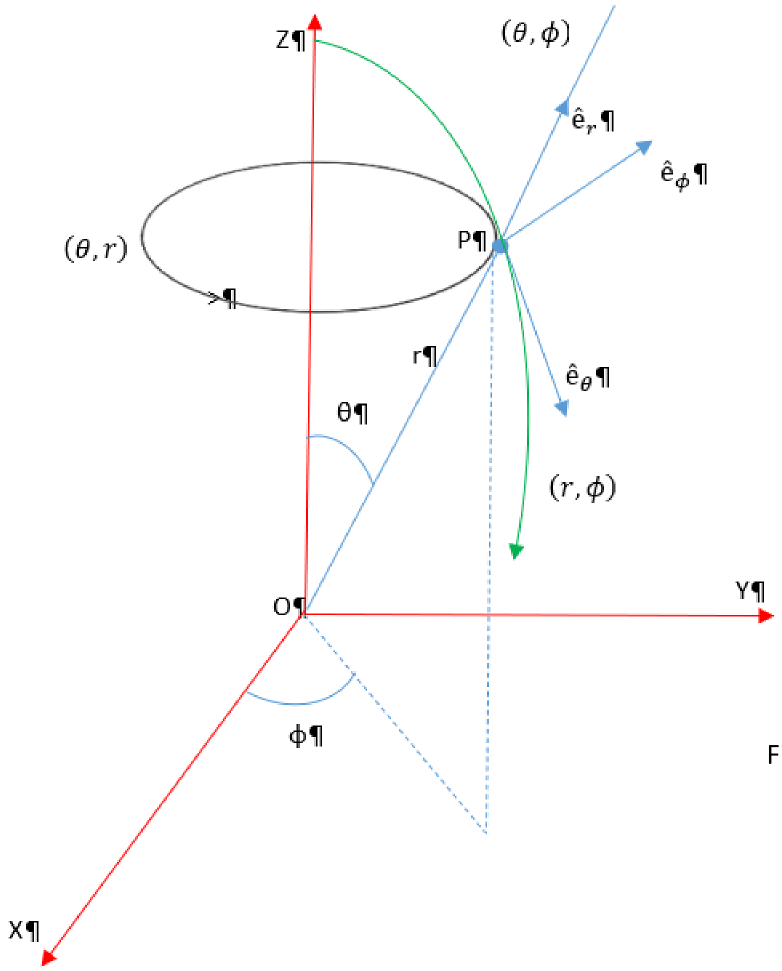


Fig.A1

Nous trouvons une longueur $r = OP$ et respectivement deux angles : θ compris entre 0 et π et ϕ compris entre 0 et 2π.
<u>Si θ et ϕ sont fixes</u> et r seul varie, le point P se déplace selon r. Les angles θ et ϕ définissent une direction dans l'espace.
<u>Si θ et r sont constants</u>, la demi-droite r décrit un cône. Le point P se déplace selon un cercle. La variable est ici l'angle ϕ.
Enfin nous avons le cas où <u>ϕ et r sont constants</u>, ϕ constant signifie que OZ, r, ainsi que la perpendiculaire au plan XOY et passant par le point P sont dans le même plan vertical.
r est le <u>*rayon vecteur*</u> du point P, θ est son <u>*angle polaire*</u> ou sa <u>*colatitude*</u>, ϕ sa <u>*longitude*</u> ou son <u>*azimut*</u>.

1.2 Repère associé aux coordonnées sphériques.

Nous associons aux coordonnées sphériques un repère dont les vecteurs unités sont tangents aux lignes de coordonnées.
$\hat{e}_r$ à la même direction que la demi-droite r, $\hat{e}_\theta$, lui, est tangent au cercle situé dans le plan vertical et $\hat{e}_\phi$ est tangent à l'autre cercle.
Nous pouvons maintenant définir notre repère lié au point P :

$$(P, \hat{e}_r, \hat{e}_{\theta,} \hat{e}_\phi) \qquad dans\ cet\ ordre$$

Notons bien que le repère est solidaire du point P, *il s'agit d'un repère mobile*. Nous avons :

$$\hat{e}_r \, \Lambda \, \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \qquad (1)$$

$\hat{e}_r$ et $\hat{e}_{\theta,}$ sont dans le même plan vertical.

Nous avons donc un repère direct, mais il nous faut encore vérifier l'orthogonalité des vecteurs unitaires.
Le vecteur $\hat{e}_\theta$ étant tangent au cercle $(r, \phi\ cst)$, il est orthogonal au rayon vecteur r, en conséquence $\hat{e}_\theta$ est perpendiculaire à $\hat{e}_r$.
Nous voyons maintenant que $\hat{e}_\phi$ est tangent à un cercle situé dans le plan horizontal. En revanche $\hat{e}_r$et $\hat{e}_\theta$ sont dans le plan vertical qui contient OZ, le rayon vecteur r et la perpendiculaire au plan XOY passant par le point P. Ils sont donc orthogonaux deux à deux.

2.1 Elément de surface élémentaire. Aires.

Considérons la figure A2 :

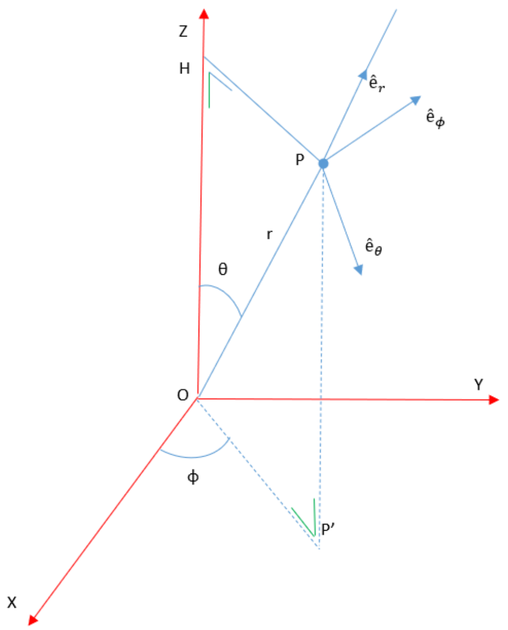


Fig.A2

Un déplacement élémentaire selon $\hat{e}_r$ est dr.
Si l'angle θ varie de $d\theta$, nous obtiendrons un déplacement du point P de $rd\theta$.
Soit le point H, le projeté orthogonal du point P sur l'axe OZ, tandis que la point P' est le projeté du point P sur le plan horizontal, en conséquence $PH = P'O$ ou encore :

$$PH = rsin\theta \qquad (2)$$

Un déplacement élémentaire selon $\hat{e}_\phi$ est donc $rsin\theta d\phi$.
Les composantes du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}$ sont les suivantes :

$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ rsin\theta d\phi \end{pmatrix} \qquad (3)$$

que nous avons représentés ci-dessous :

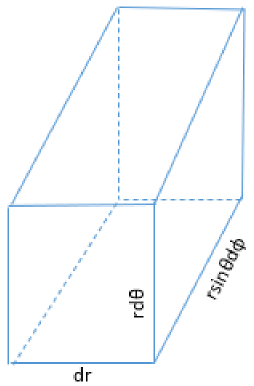


Fig.A3

Considérons une sphère de centre O passant par un point P. Les deux vecteurs tangents à cette sphère sont $\hat{e}_{\theta,}\hat{e}_\phi$. L'aire de la surface élémentaire est :

$$dA = r^2 sin\theta d\theta d\phi \qquad (4)$$

L'aire de la sphère est donc l'intégrale de l'aire élémentaire :

$$A = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 sin\theta d\theta d\phi \qquad (5)$$

Ici nous avons une contrainte géométrique : $R = r$, il vient :

$$A = R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} sin\theta d\theta d\phi \; = \; R^2 * [-cos]_0^{\pi} \; * [\phi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 \qquad (6)$$

En changeant les bornes d'intégration de l'angle polaire, il est possible de calculer les aires de différentes surfaces, ainsi pour un hémisphère :

$$A_{hémisphère} = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} sin\theta d\theta d\phi \; = 2\pi R^2 \qquad (7)$$

De manière analogue, nous pouvons calculer l'aire de la zone polaire de l'hémisphère Nord qui est comprise entre 90° et 66,6°. Nous devons cependant tenir compte de la définition des coordonnées sphériques, les bornes d'intégration de l'angle polaire seront donc 0 et 0,404 rd.
Il vient :

$$A_{polaire} = R^2 \int_0^{0,404} \int_0^{2\pi} sin\theta d\theta d\phi = 2\pi R^2 * 0,083 \qquad (8)$$

On retrouve bien le résultat précédent, à savoir que les zones polaires représentent approximativement 8% de l'aire totale du globe.

De même, l'aire de la zone tempérée se détermine de la façon suivante :

$$A_{tempérée} = R^2 \int_{0,404}^{1,162} \int_0^{2\pi} sin\theta d\theta d\phi = 2\pi R^2 * 0,52 \qquad (9)$$

Là encore, on retrouve le résultat calculer plus haut dans le document : les zones tempérées recouvrent environ 52% de l'aire totale de la planète.